

Université Joseph Fourier
DEA en Physique Subatomique
et Astroparticules

Année académique 2003-2004

Etudes d'hypernoyaux par la méthode des coordonnées hypersphériques

Directeurs de Mémoire :

Pr. Daniel Baye
Pr. Pierre Descouvemont

Mémoire de Fin d'Etudes
présenté par Benjamin Fuks
en vue de l'obtention du DEA
en Physique Subatomique
et Astroparticules

Table des matières

1	Introduction	2
2	La physique hypernucléaire	4
2.1	Les quarks u , d et s	4
2.2	Les baryons fondamentaux de spin $1/2$	6
2.3	L'hypéron Λ	8
2.4	Propriétés générales des hypernoyaux	10
2.5	Quelques exemples d'hypernoyaux	10
2.5.1	L'hypertriton ${}^3_{\Lambda}\text{H}$	10
2.5.2	$\text{Le } {}^5_{\Lambda}\text{He}$	11
2.5.3	$\text{Le } {}^9_{\Lambda}\text{Be}$	11
2.5.4	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	12
3	La méthode des coordonnées hypersphériques	13
3.1	Introduction	13
3.2	Les coordonnées de Jacobi	13
3.2.1	Définition	13
3.2.2	Permutation des coordonnées de Jacobi par rotation	14
3.3	Les coordonnées hypersphériques	15
3.4	L'hamiltonien	16
3.5	Les harmoniques hypersphériques	18
3.5.1	Définition	18
3.5.2	Orthogonalité des harmoniques hypersphériques	19
3.5.3	Les harmoniques hypersphériques composées	19
3.5.4	Parité et harmoniques hypersphériques composées	20
3.6	Traitement de l'équation de Schrödinger	20
3.6.1	Passage aux coordonnées hypersphériques	20
3.6.2	Comportement en $\rho = 0$ et en $\rho \rightarrow \infty$	22
3.6.3	Les coefficients de Raynal-Revai	22
3.6.4	Parité et règles de sélection	24
3.7	Les transitions électriques	24
4	Méthodes numériques	26
4.1	Calcul des éléments de matrice $W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$	26
4.2	Résolution du système d'équations couplées	28
4.2.1	Introduction	28

4.2.2	Principe de la méthode des réseaux de Lagrange	28
4.2.3	Choix d'une base pour la méthode des réseaux de Lagrange . .	30
4.2.4	Résolution	31
4.2.5	Contrôle de la précision sur les coefficients $C_{\gamma Ki}^{J\pi}$ et convergence	32
4.3	Transitions électriques	32
5	Interactions	33
5.1	Introduction	33
5.2	L'interaction NN	33
5.3	L'interaction ΛN	34
5.3.1	Description générale	34
5.3.2	Potentiels de type coeur dur	35
5.3.3	Potentiels réalistes	37
5.4	Interactions αN et $\alpha\alpha$	39
5.4.1	Potentiel αN	39
5.4.2	Description du problème des états interdits	40
5.4.3	Traitement des états interdits : méthode des projecteurs . . .	41
5.4.4	Traitement des états interdits : méthode supersymétrique . . .	44
5.4.5	Interaction $\alpha\alpha$: potentiel BFW	45
5.4.6	Interaction $\alpha\alpha$: potentiel d'Ali-Bodmer	47
5.5	L'interaction $\alpha\Lambda$	48
5.5.1	Généralités	48
5.5.2	Potentiel SG	48
5.5.3	Potentiel Isle	49
5.6	Potentiel $\Lambda\Lambda$	50
5.6.1	Introduction	50
5.6.2	Potentiel SB	50
5.6.3	Potentiel de Hiyama, Kamimura, Motoba, Yamada et Yamamoto	52
6	Etude du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$	55
6.1	Description générale de l'étude	55
6.2	Niveaux d'énergie	55
6.3	Fonctions d'onde	57
6.3.1	Généralités	57
6.3.2	Potentiel BFW (traité par la méthode supersymétrique) et po- tentiel d'Ali-Bodmer	57
6.3.3	Potentiel BFW (traité par la méthode des projecteurs)	60
6.4	Rayon carré moyen	62
6.5	Transitions électriques	62
6.5.1	Généralités	62
6.5.2	Cas du ${}^9\text{Be}$	63
6.5.3	Cas du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$	63

7	Etude du ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$	65
7.1	Introduction	65
7.2	Niveaux d'énergie	65
7.3	Fonctions d'onde	66
7.4	Rayon moyen	67
8	Conclusion	68
A	Les symétries de type $SU(N)$	70
A.1	La symétrie d'isospin - le groupe $SU(2)$	70
A.2	La symétrie $SU(3)$	71
A.3	Les symétries $SU(N)$	71
B	Les polynômes de Jacobi, de Laguerre et de Legendre	72
B.1	Les polynômes de Jacobi	72
B.2	Les polynômes de Legendre	73
B.3	Les polynômes de Laguerre	74
C	Orthogonalité des harmoniques hypersphériques	76
C.1	Harmoniques hypersphériques	76
C.2	Harmoniques hypersphériques composées	77
C.3	Harmoniques hypersphériques composées tenant compte du spin	78
D	Les coefficients de Raynal-Revai	79
E	Calcul des éléments de matrice réduits dans le cas des transitions électriques	80
E.1	Terme dépendant de \mathbf{y}	80
E.2	Calcul de l'intégrale en α dans l'élément M_y	82
E.2.1	$\lambda = 0$	83
E.2.2	$\lambda = 1$	83
E.2.3	$\lambda = 2$	84
E.3	Terme dépendant de \mathbf{x}	85
E.4	Calcul de l'intégrale en α dans l'élément M_x	87
E.4.1	$\lambda = 1$	87
E.4.2	$\lambda = 2$	88

Remerciements

J'adresse ma sincère reconnaissance et un cordial merci à mes directeurs de mémoire, Messieurs Daniel Baye et Pierre Descouvemont. Grâce à leur écoute, à leur guidance, et aux discussions que nous avons eues, j'ai pu concevoir ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à Pierre Capel, Gérald Goldstein et Marc Theeten pour leur aide efficace en informatique et en programmation.

Je ne peux bien sûr oublier Messieurs Johann Collot et François Montanet, qui me permettent de présenter ce travail à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, dans le cadre d'un DEA en physique subatomique. Je les en remercie.

Ce mémoire est le fruit d'un long travail. Sans l'aide et le soutien de mes promoteurs, de ma famille et de mes amis il n'aurait pu aboutir. A vous tous qui m'avez aidé et soutenu aussi bien intellectuellement que moralement, je vous adresse mes plus profonds remerciements.

Encore merci à tous.

Chapitre 1

Introduction

La matière nucléaire ordinaire est composée de neutrons et de protons, eux-mêmes composés de quarks up et down. Dans la nature, il existe cependant d'autres types de quarks ; le plus léger d'entre eux, et donc le plus facile à mettre en évidence expérimentalement, est le quark étrange ([1]-[3]). La particule Λ est une particule composée d'un quark étrange, un quark up et un quark down ([1]-[2]). Un hypernoyau est composé de neutrons, protons et Λ ([4]).

Nous allons étudier les deux hypernoyaux ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ et ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$. Ils présentent la particularité d'avoir déjà été étudiés expérimentalement ([7], [8]) et théoriquement ([30], [32], [34]). Il y a donc de nombreuses données disponibles pour effectuer des comparaisons.

Dans notre travail, nous allons considérer ces hypernoyaux comme des systèmes à 3 corps. Le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ (4 neutrons, 4 protons et un Λ) sera vu comme un système constitué d'une particule Λ et de deux noyaux ${}^4\text{He}$ (appelés également particules α , soit deux protons et deux neutrons, et considérés comme ponctuels ici), tandis que le ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ (2 neutrons, 2 protons et 2 Λ) sera vu comme un système composé d'une particule α et de deux particules Λ .

En nous plaçant dans un contexte non relativiste, les fonctions d'onde de ces hypernoyaux obéissent à l'équation de Schrödinger à 3 corps. Nous commencerons par expliciter les potentiels que nous allons utiliser pour décrire les différentes interactions dont nous avons besoin dans ce travail. Ces potentiels ne sont malheureusement pas bien connus, ce qui fait que nous allons en tester plusieurs et les comparer ensuite ([19]-[24] et [26]-[29]). Une façon bien connue de résoudre cette équation est la méthode des coordonnées hypersphériques ([9]-[14]). C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce mémoire.

Nous obtiendrons les fonctions d'onde, les premiers niveaux d'énergie et les rayons moyens de ces deux hypernoyaux. Dans le cas du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, nous étudierons également la transition $E2$ entre le premier état excité et l'état fondamental, ainsi que le moment quadrupolaire électrique. Nous comparerons nos résultats avec les valeurs expérimentales et les noyaux *ordinaires* ${}^9\text{Be}$ et ${}^8\text{Be}$.

Le chapitre 2 traitera plus spécifiquement des bases nécessaires pour la compréhension de ce qu'est un hypernoyau, et développera quelques exemples. Le chapitre 3 détaille la méthode utilisée dans ce travail pour résoudre l'équation de Schrödinger à trois corps, et aboutit aux équations hypersphériques que nous allons résoudre par les différentes méthodes numériques proposées dans le chapitre 4. Le chapitre 5 parle des différents potentiels que nous allons utiliser et comparer dans l'étude des hypernoyaux. Le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ est étudié dans le chapitre 6 et le ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ dans le chapitre 7.

Chapitre 2

La physique hypernucléaire

2.1 Les quarks u , d et s

Tous les rappels de physique des particules exposés ici peuvent être consultés dans la référence [1]. En physique, nous appelons *particule élémentaire* toute particule qui, dans la limite des moyens expérimentaux actuels, est observée comme ponctuelle. Toute autre particule peut être considérée comme un produit de l'assemblage de particules élémentaires. Il en existe un petit nombre.

Les fermions élémentaires sont classés en deux grandes familles distinctes : les *leptons* et les *quarks*. D'une manière générale, ils possèdent tous un spin $1/2$ et une masse. La différence entre les deux familles réside dans le fait que les leptons sont insensibles à l'interaction forte, alors que les quarks sont sensibles à toutes les interactions. Les particules composites stables les plus légères (les *hadrons*) ne sont composées que de quarks, car les particules composées de leptons (par exemple le positronium) ont une durée de vie beaucoup trop courte pour être considérées comme stables.

Il existe 6 sortes de quarks, appelées *savours* : u (*up*), c (*charmé*), t (*top*), d (*down*), s (*étrange*) et b (*beau*). u , c , et t ont une charge de $\frac{+2e}{3}$, alors que d , s et b ont une charge de $\frac{-e}{3}$, où e est la charge élémentaire de l'électron. Dans notre travail, seuls les quarks u , d et s vont nous intéresser. En effet, nous voulons essayer de généraliser l'étude des noyaux, qui sont composés de quarks u et d . Un premier pas dans cette généralisation sera l'ajout du quark s , qui est le plus léger après u et d . Les masses des quarks ne sont pas bien définies, néanmoins, nous pouvons les estimer comme suit (ces valeurs sont tirées des publications du *Particle Data Group*, voir [2]) :

$$1,5 \text{ MeV} < m_u < 4,5 \text{ MeV}$$

$$5 \text{ MeV} < m_d < 8,5 \text{ MeV}$$

$$80 \text{ MeV} < m_s < 155 \text{ MeV}$$

Les autres quarks sont appelés saveurs lourdes en raison de leur masse largement supérieure :

$$1 \text{ GeV} < m_c < 1,4 \text{ GeV}$$

$$4 \text{ GeV} < m_b < 4,5 \text{ GeV}$$

$$m_t = 174,3 \pm 5,1 \text{ GeV}$$

Les masses des quarks légers peuvent sembler très faibles lorsqu'on les compare à la masse du nucléon, composé de 3 quarks parmi u et d , qui est de l'ordre du GeV. Les valeurs ci-dessus sont celles calculées par la QCD (*chromodynamique quantique*) et correspondent aux estimations des masses de courant. Dans ce cas-là, le nucléon peut être considéré comme un nuage composé d'un grand nombre de paires quark-antiquark de même type (appelés *quarks de la mer de Dirac*) et 3 quarks parmi u et d non appareillés (appelé *quarks de valence*), tout cela étant similaire à la disposition des électrons dans le nuage électronique des atomes. De plus, les quarks sont confinés à l'intérieur des nucléons (on ne peut observer de quarks libres dans des conditions de pression et de température normales). Cela nécessite de l'énergie, qui se retrouve dans la masse du nucléon. Toutes ces considérations expliquent les différences de masse. Cette vision peut bien sûr être généralisée pour tous les hadrons (voir plus bas). Il existe aussi ce qu'on appelle les masses des quarks constituants, qui permettent d'interpréter les hadrons comme un assemblage de seulement 3 quarks. Dans ce cas-là, les quarks ont des masses de plusieurs centaines de MeV. Notons cependant que cela reste un modèle donnant de bons résultats par rapport à l'expérience.

Nous voyons que les quarks u et d ont des masses du même ordre de grandeur. De plus, l'interaction forte ne tient pas compte (au premier ordre) de la nature u ou d du quark. Nous allons donc considérer qu'ils font partie d'un même doublet d'isospin $I = 1/2$. La projection I_3 de u vaudra $1/2$ et celle de d $-1/2$. Cette symétrie correspond à une invariance du système en interaction forte sous une opération du groupe $SU(2)$ (voir annexe A). Remarquons que les nombres quantiques d'isospin sont nuls pour tous les autres quarks. Il nous reste à incorporer le quark s .

A chaque quark nous associons un opérateur et un nombre quantique correspondant qui lui sont propres. Dans le cas de u et d , nous associerons cependant le même opérateur : il s'agit de l'isospin I (et plus spécifiquement de sa projection I_3). Pour s , il va s'agir de l'étrangeté S . Elle vaudra -1 pour le quark s , $+1$ pour l'antiquark \bar{s} et 0 pour toutes les autres saveurs. Nous pouvons classer ces 3 quarks dans un repère portant I_3 en abscisse et S en ordonnée (voir figure 2.1, page suivante).

Cette figure est typique d'une certaine symétrie, à condition que les masses des trois particules soient identiques. Or la masse de s est de loin supérieure à celles de u et d . Malgré cela, nous allons définir une symétrie entre ces quarks, analogue à l'isospin pour u et d , de sorte que l'interaction forte ne les différenciera pas : $SU(3)$ (voir annexe A). Nous aurons alors un système invariant par rapport aux

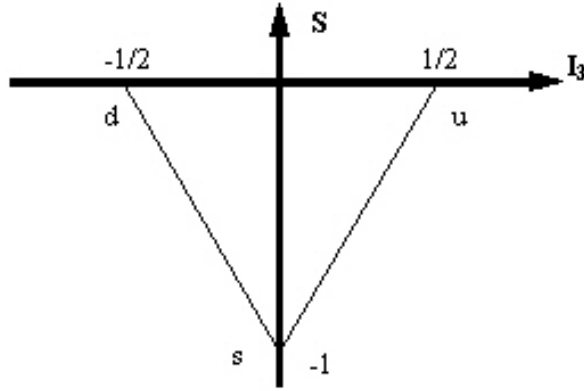


FIG. 2.1 – Triplet de quarks u , d , et s .

transformations du groupe $SU(3)$. Cette symétrie est bien entendue approchée (en raison des différences de masse).

A présent, nous allons composer ces 3 quarks afin d'obtenir des particules plus complexes.

2.2 Les baryons fondamentaux de spin 1/2

En assemblant différents quarks, nous pouvons obtenir des particules plus lourdes. Les premières que nous obtenons sont appelées *hadrons*. Bien qu'étymologiquement hadron signifie *particule lourde*, la définition actuelle est qu'il s'agit de particules dont les interactions sont régies par l'interaction forte. Il existe deux types de hadrons : les *mésons* et les *baryons* (remarquons qu'il existe aussi des *antibaryons*). Les mésons sont constitués d'un quark et d'un antiquark ($q\bar{q}$) et les baryons de trois quarks (qqq). Nous allons nous intéresser aux baryons.

Les éléments de spectroscopie hadronique qui sont présentés dans ce travail se trouvent dans les références [1] et [3]. Dans notre travail, un quark q sera de type u , d ou s . Nous avons alors 27 possibilités pour former un baryon qqq (en tenant compte de l'ordre). La théorie des représentations pour le groupe $SU(3)$ (symétrie entre u , d et s) nous dit que nous pouvons grouper ces 27 possibilités en sous-groupes de particules ayant des propriétés de symétrie similaires par rapport à l'échange de quarks. Elle prédit un sous-groupe de 10 particules, 2 sous-groupes de 8 particules, et un sous-groupe d'une particule. Nous allons considérer les baryons dans leur état fondamental (leur moment orbital L est nul).

La fonction d'onde des baryons fondamentaux est symétrique vis-à-vis de l'échange de deux quarks. On pourrait croire que cela brise le principe d'antisymétrie pour la fonction d'onde des fermions, mais ce n'est pas le cas. Cela s'explique par le fait que celle-ci est le produit tensoriel d'une fonction d'onde dans l'espace habituel (tenant

compte des spins, isospins, ...) et d'une fonction d'onde dans l'espace des couleurs. A chaque quark est associé un nombre quantique de couleur (il en existe 3 différentes), et la matière ordinaire est non colorée. Cela implique obligatoirement des conditions sur les couleurs des trois quarks de valence d'un baryon, et sur les propriétés de symétrie de la partie couleur de sa fonction d'onde : elle est antisymétrique pour l'échange de quarks. Comme la fonction d'onde *habituelle* dont on parlait ci-dessus est symétrique, le principe d'antisymétrie n'est donc pas brisé. C'est lui en fait qui a justifié l'introduction de la couleur.

Parmi les 4 sous-groupes de particules dont nous avons parlé ci-dessus, il n'en restera que deux en raison de ces propriétés de symétrie : un décuplet (10 particules) et un octet (8 particules). Chacun comporte des particules de spin total bien défini : 1/2 pour l'octet et 3/2 pour le décuplet. Comme l'on ne s'intéresse ici qu'à des particules de spin 1/2, seul l'octet fera l'objet d'une description plus détaillée.

Nous pouvons classer ces 8 particules comme nous l'avons fait pour les quarks. En prenant un repère avec en abscisse la projection de l'isospin total (qui est la somme des projections des isospins des quarks de valence, ou constituants) et en ordonnée l'étrangeté totale (qui est la somme des étrangetés de ces mêmes quarks), on obtient la figure 2.2.

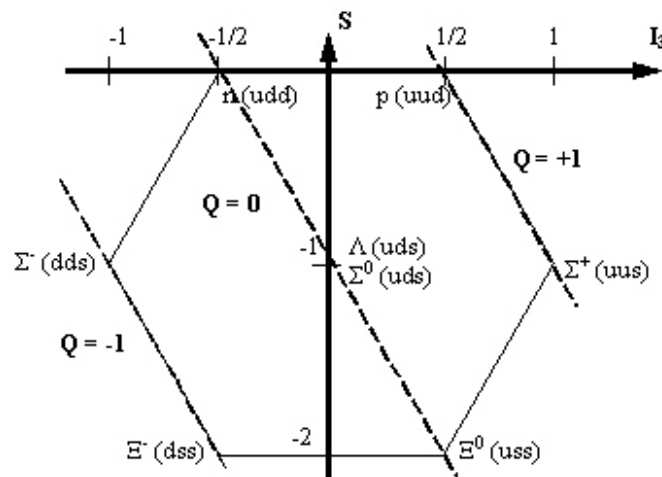


FIG. 2.2 – Octet des baryons, avec les quarks constituants ou de valence entre parenthèses, et les isocharges.

Les particules ayant une étrangeté totale S nulle sont appelées *nucléons*, alors que celles ayant une étrangeté totale non nulle sont appelées *hypérons*. Sur la figure 2.2, nous pouvons voir que les nucléons n et p appartiennent à un même doublet d'isospin, que les 3 hypérons Σ appartiennent à un même triplet d'isospin, que les 2 hypérons Ξ appartiennent aussi à un doublet d'isospin, et que l'hypéron Λ appartient quant

à lui à un singulet d'isospin. Chaque multiplet d'isospin a un nombre quantique d'étrangeté bien défini.

La charge des particules se lit facilement sur cette figure en considérant les droites parallèles à celle d'équation $S = -2I_3$. Nous voyons donc 2 particules de charge $+e$, 4 particules neutres, et 2 particules de charge $-e$.

Les 8 particules ci-dessus ont des propriétés similaires par rapport à l'interaction forte. Elles ont d'ailleurs à peu près toutes la même masse (les différences venant du fait que la symétrie de type $SU(3)$ postulée au départ n'est qu'approchée) :

$$\begin{aligned} m_N &\simeq 939 \text{ MeV} \\ m_\Lambda &\simeq 1115 \text{ MeV} \\ m_\Sigma &\simeq 1190 \text{ MeV} \\ m_\Xi &\simeq 1320 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Dans ce travail, nous allons nous intéresser uniquement aux nucléons et à l'hypéron Λ . Les nombres quantiques d'un baryon fondamental sont $J^\pi = \frac{1}{2}^+$, et sont donc ceux de n , p et Λ .

Nous avons la même symétrie $SU(2)$ entre le doublet de quarks $u - d$ et celui de nucléons $n - p$. Nous pouvons nous attendre à avoir une même symétrie de type $SU(3)$ entre le triplet de quarks $u - d - s$ et celui de baryons $p - n - \Lambda$. Certains potentiels reflétant l'interaction baryon-baryon seront construits en considérant cette symétrie exacte.

Nous pouvons constituer une nouvelle série d'hypérons en introduisant un 4^{ème} quark : le quark charmé c . Nous avons l'habitude de les classer d'une façon semblable à celle décrite ci-dessus (mais dans un repère à 3 dimensions, avec comme 3^{ème} axe celui du charme C). Nous pouvons alors former des hypernoyaux contenant un hypéron charmé.

2.3 L'hypéron Λ

La plupart des informations disponibles dans ce paragraphe sont tirées des publications du *Particle Data Group* (référence [2]) et datent de l'année 2002.

Dans le modèle des quarks constituants, la particule Λ est composée de 3 quarks, un u , un d et un s . Il s'agit d'un baryon neutre de spin $1/2$, faisant partie d'un singulet d'isospin, de masse $m_\Lambda = 1115,683 \pm 0,006 \text{ MeV}$. Son moment magnétique vaut $\mu_\Lambda = -0,613 \pm 0,004 \mu_N$ (avec $\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} = 3,15 \cdot 10^{-8} \text{ eV T}^{-1}$). Son moment électrique dipolaire doit être nul d'après la théorie (invariance P et T), ce qui est confirmé expérimentalement, à 10^{-16} près.

Sa durée de vie est de $\tau_\Lambda = 2,632 \pm 0,020 \cdot 10^{-10} \text{s}$. Cet ordre de grandeur nous renseigne sur la nature des désintégrations de cet hypéron. En effet, le Λ se désintègre faiblement, dans un mode cousin de la désintégration β (interaction nucléaire faible). Le quark s est converti en quark u ou d par un boson de jauge faible W avec production ou non d'une paire de quark-antiquark u ou d . Il y a deux types de désintégrations (voir [4] et [5]) :

- Les désintégrations mésoniques (formation de pions et de nucléons), dégageant des énergies de quelques dizaines de MeV. Les nucléons finaux ont des impulsions d'environ 100 MeV/c.

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- + 38 \text{ MeV}$$

$$\Lambda \rightarrow n + \pi^0 + 41 \text{ MeV}$$

- Les désintégrations non mésoniques (formation de nucléons seulement) dégagent des énergies d'environ 175 MeV, et les impulsions des nucléons (≈ 400 MeV/c pour chacun) sont plus importantes que dans le cas précédent. Ce mode ne peut se passer qu'en milieu nucléaire.

$$\Lambda + n \rightarrow n + n + 176 \text{ MeV}$$

$$\Lambda + p \rightarrow n + p + 176 \text{ MeV}$$

Remarquons qu'aucun de ces processus ne conserve l'étrangeté (ils ont tous un $\Delta S = 1$). Les modes non mésoniques sont les principaux modes de désintégration pour le Λ libre : dans 63,9% des cas, nous avons le canal *proton* et dans 35,8% le canal *neutron*, le reste se répartissant entre les réactions suivantes :

$$\Lambda \rightarrow n + \gamma$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- + \gamma$$

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$$

$$\Lambda \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \gamma$$

Les hypérons ont diverses applications. On peut tout d'abord s'en servir comme sondes du milieu nucléaire : l'hypéron interagit (faiblement) sur certaines propriétés du milieu (exemple : modification de la parité) et peut exciter certains états nucléaires. Le fait d'ajouter un hypéron à une structure nucléaire peut également accroître sa stabilité (exemple : si l'on ajoute un hypéron Λ au ^8Be , on aura un hypernoyau $^9_\Lambda\text{Be}$ qui est beaucoup plus stable). Le contraire est également observé : un hypéron qui se désintègre faiblement peut entraîner des réactions de fission dans le milieu nucléaire.

Les hypérons nous permettent également de tester les différents modèles de l'interaction baryon-baryon déterminés dans le domaine d'étrangeté nulle, et de voir si ces modèles peuvent s'extrapoler suffisamment bien pour une interaction baryon-baryon quelconque. Cela nous permettra de mieux connaître l'interaction forte.

2.4 Propriétés générales des hypernoyaux

Un système composé de nucléons et d'hypérons est appelé un hypernoyau. La différence majeure par rapport aux noyaux habituels est le nombre quantique d'étrangeté total S qui est non nul. Un Λ -hypernoyau (hypernoyau à un hypéron Λ) est noté ${}^A_{\Lambda}Z$ où A est le nombre total de baryons. De même, un hypernoyau contenant deux Λ sera noté ${}^A_{\Lambda\Lambda}Z$.

Le premier hypernoyau est découvert en 1952 (voir [4]) : Danysz et Pniewski observent la désintégration

$$\Lambda \rightarrow \pi^- + p$$

et en déduisent l'existence de la particule Λ . Leurs conclusions affirment que ce Λ vient d'un hypernoyau ${}^4_{\Lambda}\text{He}$. Pour les hypernoyaux plus lourds ($A > 5$), les modes non mésoniques de désintégration du Λ sont dominants. Cependant, la réaction ci-dessus (de type mésonique) fut utilisée pendant tout un temps afin de déterminer les propriétés d'hypernoyaux dont le nombre de masses pouvait atteindre $A = 15$.

Plus récemment, nous pouvons produire et étudier des hypernoyaux dont le nombre de masses atteint $A = 89$ (au Japon par exemple) grâce aux faisceaux de mésons K^\pm (les kaons chargés). Pour rappel, un méson est une particule composite constituée d'un quark et d'un antiquark. Le K^+ comporte un quark u et un antiquark \bar{s} ; le K^- (l'antiparticule du K^+) comporte un quark s et un antiquark \bar{u} . Il existe aussi deux kaons neutres, le K^0 (un quark d et un antiquark \bar{s}) et le \bar{K}^0 (un quark s et un antiquark \bar{d}) mais ils ne sont pas utilisés pour la production d'hypernoyaux. Voici quelques-unes des différentes réactions se déroulant en accélérateurs et permettant d'obtenir un Λ , et donc un hypernoyau :



Remarquons que les nombres des différentes saveurs des quarks sont conservés dans ces réactions.

Le premier hypernoyau $\Lambda\Lambda$ fut observé en 1963 (mais il faudra attendre l'année 2001 pour avoir une preuve suffisamment précise de son existence, voir [8]). Dans les années 60, on commença à étudier la diffusion ΛN .

2.5 Quelques exemples d'hypernoyaux

2.5.1 L'hypertriton ${}^3_{\Lambda}\text{H}$

Ni l'interaction ΛN , ni l'interaction ΣN , ni l'interaction $\Lambda\Lambda$ ne possèdent d'état lié. L'hypertriton est donc l'hypernoyau le plus léger existant. Il joue un rôle analogue à celui du deuton en physique nucléaire. Il est l'état fondamental du système ΛNN , qui sera utilisé afin de construire certains modèles de la force YN , où Y représente

un baryon quelconque. Son état fondamental est $J^\pi = \frac{1}{2}^+$, et l'état singulet est plus lié que l'état triplet. Son énergie de liaison est de l'ordre de 130 keV. C'est très faible en comparaison avec le ${}^3\text{H}$ dont l'énergie de liaison vaut 8,48 MeV (voir [4]). Remarquons que l'hypertriton est lié uniquement en raison de la force à 3 corps (entre le p , le n et le Λ) qui est attractive et légèrement supérieure à l'énergie de séparation du Λ .

2.5.2 Le ${}^5_\Lambda\text{He}$

Cet hypernoyau est particulier en raison de l'énergie de liaison de l'hypéron, $3,10 \pm 0,2$ MeV (valeur expérimentale tirée de l'article [6]), qui est plus faible d'un facteur 2 par rapport à ce que prédisent les différents modèles existants. L'hypernoyau doit en fait être considéré comme un coeur nucléaire (un noyau ${}^4\text{He}$, ou particule α) et un hypéron seul, comme cela est expliqué dans la référence [4]. L'interaction entre l'hypéron et le nucléon est affaiblie en raison de la présence des autres nucléons, et l'énergie nécessaire pour lier le Λ est donc plus faible.

Des potentiels réalistes actuels se basent sur ces considérations afin de reproduire exactement l'énergie de liaison du ${}^5_\Lambda\text{He}$. Nous les utiliserons dans les chapitres suivants pour modéliser l'interaction entre un hypéron Λ et un noyau α .

2.5.3 Le ${}^9_\Lambda\text{Be}$

L'hypéron Λ permet de stabiliser le noyau ${}^8\text{Be}$, et nous devrions donc retrouver des similitudes entre ce noyau et l'hypernoyau, notamment au niveau des spectres d'énergie. Les valeurs citées dans ce paragraphe sont tirées de l'expérience, et se trouvent dans l'article [7], comparant également les différences noyau-hypernoyau dans le cadre du Beryllium.

Nous avons pour les trois premiers niveaux du ${}^8\text{Be}$ des états 0^+ , 2^+ et 4^+ (sous la forme L^π). Ces trois niveaux se retrouvent dans le spectre du ${}^9_\Lambda\text{Be}$ avec les mêmes différences d'énergie entre eux, mais décalés vers le bas. Cela confirme le fait que l'hypéron stabilise le ${}^8\text{Be}$ dont le fondamental se trouve dans le continuum ($+0,092$ MeV par rapport à la dissociation en deux particules α). On observe la même chose pour les premiers états excités. L'énergie de l'état fondamental de l'hypernoyau est à $-6,62$ MeV par rapport à la dissociation ${}^9_\Lambda\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + \Lambda$. Cette valeur correspond à un niveau $J^\pi = 1/2^+$ ($J = L \pm S_\Lambda$). Le premier niveau excité se trouve 3,08 MeV plus haut, et correspond donc à un état lié, contrairement au cas du ${}^8\text{Be}$. La correction spin-orbite de ce niveau ($L^\pi = 2^+$ se subdivise en $J^\pi = 3/2^+$ et $J^\pi = 5/2^+$) vaut un peu moins de 100 keV.

Le niveau $L^\pi = 4^+$ se situe environ 12 MeV au-dessus du fondamental, comme dans le spectre du ${}^8\text{Be}$. Remarquons cependant que ce niveau est le deuxième état excité dans le spectre du noyau, mais cela n'est pas le cas pour l'hypernoyau : des niveaux de parité négative se sont intercalés. Certains de ces niveaux peuvent être

expliqués à partir du spectre du ${}^9\text{Be}$. Par contre, d'autres ne s'expliquent que par le principe de Pauli, qui s'applique aux nucléons et pas au Λ . Le Λ peut donc occuper certains états qui ne sont pas accessibles aux nucléons, ce qui implique des niveaux présents dans le spectre de l'hypernoyau interdits par le principe de Pauli pour le spectre du ${}^9\text{Be}$. D'autres niveaux excités sont communs aux deux spectres, mais les valeurs expérimentales disponibles pour l'hypernoyau restent trop maigres pour effectuer une comparaison. Pour ces raisons, nous nous bornerons à étudier l'état fondamental et le premier état excité du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$.

Nous pouvons mettre en évidence les différences nucléon- Λ en comparant le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ au ${}^9\text{Be}$. L'hypernoyau ne diffère que par le Λ qui remplace l'un des neutrons du noyau.

2.5.4 ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$

Le ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$ est le premier hypernoyau lié à $S = -2$ (remarquons que le ${}_{\Lambda\Lambda}{}^4\text{He}$ pourrait exister, mais nous n'avons pas de preuve expérimentale). Grâce à l'événement Nagara (voir référence [8]), nous avons la preuve de son existence, et différentes données importantes à son sujet sont actuellement connues : l'énergie de liaison des deux hyperons à la particule α ($-7, 25 \pm 0, 19$ MeV) et l'énergie d'interaction $\Lambda - \Lambda$ ($1, 01 \pm 0, 20$ MeV). L'état fondamental est un état 0^+ .

L'expérience utilise un hyperon Ξ^- , car il faut obtenir un hypernoyau d'étrangeté -2, et le Ξ^- est une particule d'étrangeté -2. Le Ξ^- est produit à partir de collisions entre des faisceaux de kaons négatifs K^- avec une cible de diamant. On récupère un faisceau de kaons positifs K^+ à la sortie. Deux unités d'étrangeté ont ainsi été transférées à la cible, ce qui permet la production de Ξ^- . L'expérience de Nagara s'est déroulée de la façon suivante : une fois produit, l'hyperon Ξ^- est ralenti jusqu'au repos en un point où il est capturé par le milieu (des noyaux ${}^{12}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$ ou ${}^{16}\text{O}$). Ensuite la particule créée lors de la capture se désintègre en 3 particules chargées. L'une d'elles est un hypernoyau ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$. Par exemple, en milieu carboné, nous avons la réaction :



S'en suit la désintégration de l'hypernoyau :



Chapitre 3

La méthode des coordonnées hypersphériques

3.1 Introduction

Notre travail va consister à modéliser les différents hypernoyaux que nous allons étudier par des systèmes à 3 corps. Ensuite, nous tâcherons de résoudre l'équation de Schrödinger correspondante (nous nous placerons dans un cadre non-relativiste). Une méthode utile pour résoudre cette équation dans le cas d'un problème à 3 corps est la méthode des coordonnées hypersphériques. Dans ce chapitre, nous allons détailler et expliquer les principes de la méthode. Des informations supplémentaires et différents exemples d'utilisation peuvent se trouver dans les articles [9], [10], [11] et [12], ainsi que dans les Travaux de Fin d'Etudes [13] et [14].

3.2 Les coordonnées de Jacobi

3.2.1 Définition

Soit un système de N particules de masses m_i et de positions \mathbf{r}_i . Soit M la masse totale du système et \mathbf{R} les coordonnées du centre de masse :

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (3.2)$$

Nous définissons les $j^{\text{èmes}}$ coordonnées de Jacobi comme les coordonnées relatives de la $(j+1)^{\text{ème}}$ particule par rapport au centre de masse des j premières. On obtient ainsi les $N-1$ vecteurs

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^i m_j} \sum_{j=1}^i m_j \mathbf{r}_j \quad (3.3)$$

avec i allant de 1 à $N-1$. Dans notre cas, $N = 3$. Nous normaliserons les coordonnées en les multipliant par un facteur dépendant des masses. Les coordonnées résultantes n'auront plus la dimension d'une longueur mais de $[M^{1/2}L]$. Cela nous permet de nous affranchir des masses absolues de toutes les particules. En notant x_1 par x_k et x_2 par y_k (l'indice k étant là pour rappeler qu'on peut définir trois ensembles de coordonnées de Jacobi, en choisissant l'une ou l'autre particule comme référence), nous avons

$$\begin{cases} \mathbf{R} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{l=1}^3 m_l \mathbf{r}_l \\ \mathbf{x}_k &= \sqrt{\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{y}_k &= \sqrt{\frac{m_k (m_i + m_j)}{M}} \left(\mathbf{r}_k - \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j}{m_i + m_j} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

où (i, j, k) est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.

Physiquement, \mathbf{R} est proportionnel aux coordonnées du centre de masse des trois particules, \mathbf{x}_k aux coordonnées relatives de la particule j par rapport à la particule i , et \mathbf{y}_k aux coordonnées relatives de la particule k par rapport au centre de masse des particules i et j .

3.2.2 Permutation des coordonnées de Jacobi par rotation

Nous avons ainsi défini trois jeux de coordonnées de Jacobi. L'on passe de l'un à l'autre par rotation. Soit 2 jeux de coordonnées de Jacobi (on ne tient pas compte ici du centre de masse) :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k &= \sqrt{\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{y}_k &= \sqrt{\frac{m_k (m_i + m_j)}{M}} \left(\mathbf{r}_k - \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j}{m_i + m_j} \right) \end{cases} \quad (3.5)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i &= \sqrt{\frac{m_j m_k}{m_j + m_k}} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \\ \mathbf{y}_i &= \sqrt{\frac{m_i (m_j + m_k)}{M}} \left(\mathbf{r}_i - \frac{m_j \mathbf{r}_j + m_k \mathbf{r}_k}{m_j + m_k} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

Introduisons l'angle φ_{ik} défini par la relation

$$\varphi_{ik} = \arctan \left((-)^P \sqrt{\frac{M m_j}{m_i m_k}} \right) \quad (3.7)$$

où P est pair (impair) si (ijk) est une permutation paire (impaire) de (123) . Calculons $\sin \varphi_{ik}$ et $\cos \varphi_{ik}$:

$$\begin{cases} \cos \varphi_{ik} &= \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi_{ik}}} = \sqrt{\frac{m_i m_k}{m_i m_k + M m_j}} = \sqrt{\frac{m_i m_k}{(m_i + m_j)(m_j + m_k)}} \\ \sin \varphi_{ik} &= (-)^P \sqrt{\frac{\tan^2 \varphi_{ik}}{1 + \tan^2 \varphi_{ik}}} = (-)^P \sqrt{\frac{M m_j}{m_i m_k + M m_j}} = (-)^P \sqrt{\frac{M m_j}{(m_i + m_j)(m_j + m_k)}} \end{cases} \quad (3.8)$$

Cet angle φ_{ik} permet de passer du système de coordonnées k au système de coordonnées i par rotation d'angle φ_{ik} . En effet

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i &= -\cos \varphi_{ik} \mathbf{x}_k + \sin \varphi_{ik} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_i &= -\sin \varphi_{ik} \mathbf{x}_k - \cos \varphi_{ik} \mathbf{y}_k \end{cases} \quad (3.9)$$

La relation 3.9 ci-dessus se démontre facilement en remplaçant chaque variable par sa définition.

3.3 Les coordonnées hypersphériques

Les problèmes à 3 corps que nous allons rencontrer dans ce travail seront résolus par des méthodes numériques. Or il est souvent difficile de traiter numériquement des domaines de variation allant de 0 à l'infini. Le but des coordonnées hypersphériques est de limiter à un le nombre de coordonnées variant sur $[0, \infty[$.

Soit un jeu de coordonnées de Jacobi. On ne tiendra pas compte du centre de masse, puisque nous pouvons séparer son mouvement des mouvements relatifs des particules (voir [15]). Nous avons 2 coordonnées métriques (les normes de \mathbf{x}_k et \mathbf{y}_k , variant sur un domaine infini) et 4 coordonnées angulaires (les angles de \mathbf{x}_k et \mathbf{y}_k , variant sur un domaine limité). Nous allons passer à un jeu de coordonnées comprenant une seule coordonnée métrique (appelée l'hyperrayon ρ), et 5 coordonnées angulaires (les hyperangles).

L'hyperrayon est défini par

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x_k^2 + y_k^2 \\ &= \sum_{l=1}^3 \left(1 - \frac{m_l}{M}\right) x_l^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

où les coordonnées de Jacobi sont définies en 3.4. Nous voyons que l'hyperrayon est indépendant de k , et donc du jeu de coordonnées de Jacobi choisi au départ. Il a les mêmes dimensions que les coordonnées de Jacobi (à savoir, $[M^{1/2}L]$). Il représente une grandeur physique importante : il est lié au rayon en moyenne quadratique du système de 3 particules élémentaires. En effet, le carré du rayon en moyenne quadratique est défini par

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 [m_i \langle |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{CM}|^2 \rangle + m_i \langle r_i^2 \rangle] \quad (3.11)$$

où $\sqrt{\langle r_i^2 \rangle}$ est le rayon en moyenne quadratique de la particule i . En remplaçant par les coordonnées de Jacobi, nous obtenons

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{M} \left[\langle \rho^2 \rangle + \sum_{i=1}^3 m_i \langle r_i^2 \rangle \right] \quad (3.12)$$

Les hyperangles comprennent les 4 angles directeurs des vecteurs \mathbf{x}_k et \mathbf{y}_k , à savoir $\Omega_{x_k} = (\theta_{x_k}, \varphi_{x_k})$ et $\Omega_{y_k} = (\theta_{y_k}, \varphi_{y_k})$, et l'angle $\alpha_k = \arctan \frac{y_k}{x_k}$ qui n'est pas un angle physique mais plutôt une variable variant sur un domaine borné. L'ensemble des 5 angles sera noté $\Omega_{5k} = (\alpha_k, \Omega_{x_k}, \Omega_{y_k})$.

Les domaines de variation des 6 coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \quad : \quad [0, \infty[\\ \alpha \quad : \quad [0, \frac{\pi}{2}] \\ \theta_{x_k} \quad : \quad [0, \pi] \\ \varphi_{x_k} \quad : \quad [0, 2\pi[\\ \theta_{y_k} \quad : \quad [0, \pi] \\ \varphi_{y_k} \quad : \quad [0, 2\pi[\end{array} \right. \quad (3.13)$$

L'ensemble de coordonnées défini ci-dessus est particulièrement bien adapté pour résoudre l'équation de Schrödinger, comme nous allons le voir dans les développements qui vont suivre. Remarquons finalement que l'élément de volume vaut

$$\begin{aligned} dx dy &= x^2 y^2 dx dy d\Omega_x d\Omega_y \\ &= \rho^5 d\rho \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha d\Omega_x d\Omega_y \\ &= \rho^5 d\rho d\Omega_5 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.4 L'hamiltonien

L'hamiltonien d'un système à 3 corps s'écrit de façon générale

$$H = T + \sum_{i < j} V_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (3.15)$$

T est l'énergie cinétique totale des 3 particules, et V_{ij} une interaction à 2 corps.

Transposons l'énergie cinétique totale T dans le système des coordonnées hypersphériques. L'expression générale de l'opérateur d'énergie cinétique pour un système de 3 particules quelconques s'écrit :

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} \quad (3.16)$$

où les p_i sont les impulsions des 3 particules. Nous allons changer de variables vers \mathbf{R} , \mathbf{x}_k et \mathbf{y}_k (le système de coordonnées appelé \mathbf{x}'_j ci-dessous). Les coordonnées habituelles sont les \mathbf{r}_i . La règle de composition des dérivées donne

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \quad (3.17)$$

Or nous avons

$$\frac{\partial x'_j}{\partial r_i} = \begin{pmatrix} \frac{m_i}{\sqrt{M}} & \frac{m_j}{\sqrt{M}} & \frac{m_k}{\sqrt{M}} \\ -\sqrt{\mu_{ij}} & \sqrt{\mu_{ij}} & 0 \\ -\frac{m_i}{m_i+m_j} \sqrt{\mu^{(ij)k}} & -\frac{m_j}{m_i+m_j} \sqrt{\mu^{(ij)k}} & \sqrt{\mu^{(ij)k}} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

où $\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ est la masse réduite du système (i, j) et $\mu^{(ij)k} = \frac{m_k(m_i + m_j)}{M}$. En tenant compte de la définition de l'impulsion $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ et en remplaçant ces résultats dans l'expression 3.16, nous obtenons finalement

$$T = \frac{1}{2} (P_R^2 + p_{x_k}^2 + p_{y_k}^2) \quad (3.19)$$

Les facteurs massiques sont à présent incorporés dans les variables (de par leur définition) et nous pouvons facilement séparer le mouvement du centre de masse :

$$T = T_{CM} + \frac{1}{2} (p_{x_k}^2 + p_{y_k}^2) \quad (3.20)$$

Passons maintenant dans le système des coordonnées hypersphériques en changeant de variables vers ρ et α_k :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} = \cos \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \alpha_k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} = \sin \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \alpha_k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \end{cases} \quad (3.21)$$

En utilisant la relation 3.21 et le développement du laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2} \quad (3.22)$$

nous obtenons à partir de 3.20

$$\begin{aligned} T &= T_{CM} - \frac{\hbar^2}{2} (\Delta_{x_k}^2 + \Delta_{y_k}^2) \\ &= T_{CM} - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho \cos \alpha_k} \left[\cos \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \alpha_k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right] \right) \\ &\quad + \frac{2}{\rho \sin \alpha_k} \left[\sin \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \alpha_k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right] - \frac{l^2(\Omega_{x_k})}{\rho^2 \cos^2 \alpha_k} - \frac{l^2(\Omega_{y_k})}{\rho^2 \sin^2 \alpha_k} \end{aligned} \quad (3.23)$$

où apparaissent les deux opérateurs de moment cinétique orbital $l^2(\Omega_{x_k})$ et $l^2(\Omega_{y_k})$. En regroupant les parties radiale et angulaire, nous obtenons finalement

$$T = T_{CM} - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{K^2(\Omega_{5k})}{\rho^2} \right) \quad (3.24)$$

avec l'opérateur angulaire hypersphérique $K^2(\Omega_{5k})$ défini par

$$K^2(\Omega_{5k}) = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha_k^2} - 4 \cot(2\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + \frac{l^2(\Omega_{x_k})}{\cos^2 \alpha_k} + \frac{l^2(\Omega_{y_k})}{\sin^2 \alpha_k} \quad (3.25)$$

3.5 Les harmoniques hypersphériques

3.5.1 Définition

Nous allons étudier les fonctions propres de l'opérateur $K^2(\Omega_5)$, appelées harmoniques hypersphériques, car elles jouent un rôle important dans le traitement de l'équation de Schrödinger $H\Psi = E\Psi$, où H est défini en 3.15 et où E est l'énergie du système. A partir d'ici, nous n'indiquerons plus les indices k afin d'alléger les notations. Les harmoniques hypersphériques sont un ensemble de fonctions propres communes aux opérateurs $K^2(\Omega_5)$ (avec la valeur propre $K(K+4)$), $l^2(\Omega_x)$ (avec la valeur propre $l_x(l_x+1)$), $l^2(\Omega_y)$ (avec la valeur propre $l_y(l_y+1)$), $l_z(\Omega_x)$ (avec la valeur propre m_x), et $l_z(\Omega_y)$ (avec la valeur propre m_y). Nous les notons $\mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5)$ et elles sont définies par

$$\mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) = \phi_K^{l_x l_y}(\alpha) Y_{l_x}^{m_x}(\Omega_x) Y_{l_y}^{m_y}(\Omega_y) \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{cases} \phi_K^{l_x l_y}(\alpha) &= \mathcal{N}_K^{l_x l_y}(\cos \alpha)^{l_x} (\sin \alpha)^{l_y} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha) \\ \mathcal{N}_K^{l_x l_y} &= \left[\frac{2n!(K+2)(n+l_x+l_y+1)!}{\Gamma(n+l_x+\frac{3}{2})\Gamma(n+l_y+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} \\ n &= \frac{K-l_x-l_y}{2} \end{cases} \quad (3.27)$$

où Y_l^m est l'harmonique sphérique de moment l et de projection m (définie en [15]), K l'hypermoment (entier positif ou nul), l_x et l_y des entiers positifs tels que n soit positif ou nul, $\mathcal{N}_K^{l_x l_y}$ un facteur de normalisation, et $P_n^{a,b}(x)$ un polynôme de Jacobi de degré n et de paramètres a et b (voir annexe B). La projection m_x est comprise entre $-l_x$ et l_x , et la projection m_y est comprise entre $-l_y$ et l_y .

Nous pouvons démontrer que les harmoniques hypersphériques sont les fonctions propres de $K^2(\Omega_5)$ en injectant 3.26 et la définition 3.25 de $K^2(\Omega_5)$ dans l'équation aux valeurs propres

$$K^2(\Omega_5) \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) = K(K+4) \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) \quad (3.28)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 4 \cot(2\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{l_x(l_x+1)}{\cos^2 \alpha} + \frac{l_y(l_y+1)}{\sin^2 \alpha} - K(K+4) \right] \\ &\quad \times (\cos \alpha)^{l_x} (\sin \alpha)^{l_y} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

En posant $x = \cos 2\alpha$, $P(x) = P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(x)$, et en résolvant les dérivées partielles, nous obtenons comme équation pour $P(x)$:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - ((l_x+l_y+3)x + l_y - l_x) \frac{dP(x)}{dx} + n(n+l_x+l_y+2)P(x) = 0 \quad (3.30)$$

qui est bien l'équation du polynôme de Jacobi de degré n et de paramètres $(l_x+1/2)$ et $(l_y+1/2)$. Remarquons que les conditions sur les paramètres du polynôme de Jacobi sont automatiquement réalisées par les définitions de l_x et l_y (il faut que $(l_x+1/2)$ et $(l_y+1/2)$ soient des réels supérieurs à -1) (voir annexe B).

3.5.2 Orthogonalité des harmoniques hypersphériques

Le facteur de normalisation $\mathcal{N}_K^{l_x l_y}$ sert à assurer l'orthonormalité des harmoniques hypersphériques

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \delta_{KK'} \quad (3.31)$$

La démonstration se trouve en annexe C.1. Les harmoniques hypersphériques forment donc une base orthonormée de l'espace des fonctions propres de l'opérateur angulaire hypersphérique.

3.5.3 Les harmoniques hypersphériques composées

La base des harmoniques hypersphériques décrite précédemment n'est pas optimale dans le traitement de l'équation de Schrödinger car elle ne fait pas apparaître le moment cinétique orbital total L mais les nombres quantiques l_x et l_y . Nous allons plutôt utiliser la base des harmoniques hypersphériques composées, qui font apparaître les nombres quantiques L et M_L , et qui sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega_5) &= \sum_{m_x m_y} (l_x l_y m_x m_y | LM_L) \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) \\ &= \phi_K^{l_x l_y}(\alpha) [Y_{l_x}(\Omega_x) \otimes Y_{l_y}(\Omega_y)]^{LM_L} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nous avons (démonstration voir annexe C.2) :

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{LL'} \delta_{M_L M'_L} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{KK'} \quad (3.33)$$

Les harmoniques hypersphériques forment bien une base de fonctions propres de l'opérateur $K^2(\Omega_5)$. Il s'agit même d'une base de l'espace des fonctions propres communes aux opérateurs $K^2(\Omega_5)$, L^2 , l_x^2 et l_y^2 .

Dans notre travail, il va falloir tenir compte du spin des particules. Nous allons introduire des harmoniques hypersphériques composées dépendant du spin \mathbf{S} et du moment cinétique total \mathbf{J} . Cette dépendance en spin vient par exemple d'un potentiel présentant un terme de couplage spin-orbite, ou spin-spin.

Nous allons définir une base de fonctions propres de l'opérateur angulaire hypersphérique dépendant du spin en prenant simplement le produit tensoriel des harmoniques hypersphériques composées décrites ci-dessus et d'un spineur χ^{SM_S} . On obtient :

$$\mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) = [\mathcal{Y}_{KL}^{l_x l_y}(\Omega_5) \otimes \chi^S]^{JM} \quad (3.34)$$

où l'indice γ est la contraction des indices l_x , l_y , L et S . J et M correspondent au moment cinétique total et à sa projection. Par définition, nous avons

$$\mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) = \sum_{M_L M_S} (LSM_L M_S | JM) \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega_5) \chi^{SM_S} \quad (3.35)$$

Il s'agit bien sûr d'une base (voir annexe C.3) :

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J'M'}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{KK'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (3.36)$$

Nous utiliserons cette base dans la suite du travail pour développer la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger.

3.5.4 Parité et harmoniques hypersphériques composées

L'opérateur parité change l'orientation des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} , alors que l'hyperangle α reste invariant. Ainsi, la parité des harmoniques hypersphériques dépend du produit des parités des deux harmoniques sphériques :

$$\Pi \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) = (-)^{l_x + l_y} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) \quad (3.37)$$

$$\Pi \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) = (-)^{l_x + l_y} \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) \quad (3.38)$$

3.6 Traitement de l'équation de Schrödinger

3.6.1 Passage aux coordonnées hypersphériques

Nous allons partir de l'hamiltonien de trois particules isolées interagissant décrit en 3.15 :

$$H = T + \sum_{i < j} V_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (3.39)$$

Nous utiliserons l'expression de l'énergie cinétique dans les coordonnées hypersphériques calculée en 3.24 et 3.25. Nous transposerons les potentiels également :

$$V_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = V_{ij}\left(\frac{\mathbf{x}_k}{\sqrt{\mu_{ij}}}\right) = V_{ij}\left(\frac{\rho \cos \alpha_k}{\sqrt{\mu_{ij}}}\right) \quad (3.40)$$

où $\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ est la masse réduite du sous-système des deux particules i et j et (ijk) est une permutation de (123) . Dans la dernière égalité, nous avons supposé que les potentiels ne dépendent que de la distance entre les deux particules.

Nous choisissons le système d'unités suivant :

- Vitesse : $c = 1$.
- Longueur : le fm (10^{-15} m).
- Energie : le MeV ($1,602 \cdot 10^{-13}$ J).
- Action : $\hbar = 197,326968$ MeV fm/c (dédit des 3 unités ci-dessus).

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$H\Psi_{JM\pi} = E\Psi_{JM\pi} \quad (3.41)$$

L'hamiltonien s'exprimera donc, après avoir ôté le mouvement du centre de masse, par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{K^2(\Omega_{5k})}{\rho^2} \right) + \sum_{i < j} V_{ij} \left(\frac{\rho \cos \alpha_k}{\sqrt{\mu_{ij}}} \right) \quad (3.42)$$

Nous voyons que les différents hyperangles apparaissant dans cet expression dépendent à chaque fois d'un ensemble différent de coordonnées de Jacobi de départ. Nous verrons dans la section suivante comment lever ce problème par les coefficients de Raynal-Revai, afin d'avoir un seul et unique jeu de coordonnées pour tout l'hamiltonien.

Nous allons développer la fonction d'onde $\Psi_{JM\pi}$ dans la base des harmoniques hypersphériques composées tenant compte du spin et du moment cinétique total J (voir équation 3.34) :

$$\Psi_{JM\pi}(\rho, \Omega_5) = \rho^{-5/2} \sum_{\gamma K} \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) \quad (3.43)$$

où les fonctions radiales $\chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho)$ sont à déterminer. Remarquons que le rôle du facteur $\rho^{-5/2}$ est de faire disparaître la dérivée première apparaissant dans l'expression de l'énergie cinétique 3.24.

En injectant cela dans l'équation de Schrödinger 3.41, nous obtenons

$$0 = \sum_{\gamma K} \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{(K+3/2)(K+5/2)}{\rho^2} \right) - E \right] \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) + \sum_{i < j} \sum_{\gamma K} V_{ij} \left(\frac{\rho \cos \alpha_k}{\sqrt{\mu_{ij}}} \right) \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) \quad (3.44)$$

Soit $V = V_{12} \left(\frac{\rho \cos \alpha_3}{\sqrt{\mu_{12}}} \right) + V_{31} \left(\frac{\rho \cos \alpha_2}{\sqrt{\mu_{31}}} \right) + V_{23} \left(\frac{\rho \cos \alpha_1}{\sqrt{\mu_{23}}} \right)$. En multipliant à gauche l'équation ci-dessus par une harmonique hypersphérique composée quelconque $\mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J' M' *}(\Omega_5)$, puis en intégrant sur Ω_5 , nous obtenons (en utilisant la relation d'orthogonalité 3.33) le système d'équations couplées suivant : $\forall K', \gamma'$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{(K+3/2)(K+5/2)}{\rho^2} \right) - E \right] \chi_{\gamma' K'}^{J' \pi'}(\rho) + \sum_{\gamma K} \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J' M' *}(\Omega_5) V \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) d\Omega_5 \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) = 0$$

Définissons les grandeurs suivantes :

$$\mathcal{L}_K = K + 3/2 \quad (3.45)$$

$$W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) = \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J' M' *}(\Omega_5) V \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) d\Omega_5 \quad (3.46)$$

le système se réécrit finalement (après avoir renommé les indices) :

$$\begin{aligned} \forall \gamma, K : \left[\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1)}{\rho^2} \right) + (E - W_{K\gamma, K\gamma}(\rho)) \right] \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \\ = \sum_{\gamma' K'} W_{K'\gamma', K\gamma}(\rho) \chi_{\gamma' K'}^{J'\pi'}(\rho) \end{aligned} \quad (3.47)$$

la somme portant sur les valeurs de (γ', K') différentes de (γ, K) .

Ce système (infini) d'équations est équivalent à l'équation de Schrödinger. En pratique, nous allons le tronquer en limitant le développement en harmoniques hypersphériques, et en définissant une valeur maximale K_M de K qu'on ne dépassera pas. La résolution du problème se fera en deux étapes :

- le calcul des coefficients W
- la résolution du système d'équations

3.6.2 Comportement en $\rho = 0$ et en $\rho \rightarrow \infty$

Les fonctions d'onde doivent être de carré sommables, ce qui signifie que leur développement en harmoniques hypersphériques composées doit s'annuler à l'origine et tendre vers 0 lorsque ρ tend vers l'infini.

Faisons l'hypothèse que le potentiel V soit borné et ne tende pas vers l'infini plus vite que $1/\rho^2$ lorsque ρ tend vers 0. Dans le système d'équations 3.47, nous observons une singularité à l'origine (d'après le terme $\frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K+1)}{\rho^2}$). L'origine est donc un point singulier régulier.

Pour étudier le comportement à l'origine, on développe la solution en série de Frobenius dont le terme de degré minimum est en ρ^s . En remplaçant cela dans l'équation 3.47, et en identifiant les coefficients de degré le plus bas (méthode utilisée dans [15]), nous obtenons

$$-s(s+1) + \mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1) = -(s + \mathcal{L}_K)(s - \mathcal{L}_K - 1) = 0 \quad (3.48)$$

Deux comportements à l'origine sont donc possibles, mais celui en $\rho^{-\mathcal{L}_K}$ n'annule pas la fonction d'onde en $\rho = 0$ (cela est dû au facteur $\rho^{-5/2}$ apparaissant dans 3.43). Nous avons donc une fonction d'onde se comportant en $\rho^{\mathcal{L}_K+1}$ au voisinage de l'origine. En résumé,

$$\chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \sim \rho^{K+5/2} \text{ pour } \rho \rightarrow 0 \text{ et } \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \rightarrow 0 \text{ pour } \rho \rightarrow \infty \quad (3.49)$$

3.6.3 Les coefficients de Raynal-Revai

Le calcul des coefficients W (équation 3.46) fait intervenir les 3 potentiels à 2 corps $V_{12} \left(\frac{\rho \cos \alpha_3}{\sqrt{\mu_{12}}} \right)$, $V_{31} \left(\frac{\rho \cos \alpha_2}{\sqrt{\mu_{31}}} \right)$, et $V_{23} \left(\frac{\rho \cos \alpha_1}{\sqrt{\mu_{23}}} \right)$. Si l'on choisit comme repère de

base celui de la particule i , le premier terme se calcule directement. Par contre, pour les deux termes suivants, les harmoniques hypersphériques composées et le potentiel sont définis dans des repères différents. Il faut donc effectuer une transposition soit du potentiel, soit des deux harmoniques afin d'avoir les trois facteurs exprimés dans le même repère.

L'idée que nous allons suivre consiste à développer les deux harmoniques hypersphériques en harmoniques hypersphériques définies dans le repère du potentiel. Le passage des harmoniques hypersphériques d'un jeu de coordonnées à un autre peut s'écrire (voir article de Raynal et Revai [12]) :

$$\mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_{5j}) = \sum_{l'_x l'_y} \langle l'_x l'_y | l_x l_y \rangle_{KL} \mathcal{Y}_{\gamma' K}^{JM}(\Omega_5) \quad (3.50)$$

où les $\langle l'_x l'_y | l_x l_y \rangle_{KL}$ sont appelés coefficients de Raynal-Revai. Remarquons que les nombres quantiques L, M_L, S, M_S, J, M et K sont conservés par le changement de repère (en raison des propriétés de la rotation d'un jeu de coordonnées de Jacobi vers un autre). La double somme n'est pas infinie vu que chacun des indices est borné (d'après le fait que n est positif ou nul, et d'après la relation 3.27). En utilisant l'orthogonalité de la base de départ, ces coefficients peuvent s'exprimer par

$$\begin{aligned} \langle l'_x l'_y | l_x l_y \rangle_{KL} &= \int \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM*}(\Omega_{5j}) \mathcal{Y}_{\gamma' K}^{JM}(\Omega_5) d\Omega_5 \\ &= \sum_{m_x m_y m'_x m'_y} (l_x l_y m_x m_y | LM_L) (l'_x l'_y m'_x m'_y | LM_L) \\ &\times \int \mathcal{Y}_K^{l_x m_x l_y m_y*}(\Omega_{5j}) \mathcal{Y}_K^{l'_x m'_x l'_y m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cette dernière intégrale peut être facilement calculée en introduisant la rotation des coordonnées de Jacobi définie en 3.9 et les fonctions génératrices des harmoniques hypersphériques (voir [13]). L'expression complète des coefficients se trouve en annexe D.

La méthode décrite ci-dessus nous permet de calculer les 3 intégrales contenues dans $W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$. Prenons comme référence la coordonnée \mathbf{x}_1 . En définissant

$${}^i W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) = \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J'M'*}(\Omega_5) V_{jk} \left(\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) d\Omega_5 \quad (3.52)$$

et en tenant compte de 3.50 et 3.46, nous obtenons

$$\begin{aligned} W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) &= {}^1 W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) \\ &+ \sum_{l_{x_2} l_{y_2} l'_{x_2} l'_{y_2}} \langle l_{x_2} l_{y_2} | l_{x_1} l_{y_1} \rangle_{KL} \langle l'_{x_2} l'_{y_2} | l'_{x_1} l'_{y_1} \rangle_{K'L} {}^2 W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) \\ &+ \sum_{l_{x_3} l_{y_3} l'_{x_3} l'_{y_3}} \langle l_{x_3} l_{y_3} | l_{x_1} l_{y_1} \rangle_{KL} \langle l'_{x_3} l'_{y_3} | l'_{x_1} l'_{y_1} \rangle_{K'L} {}^3 W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Le nombre de coefficients à calculer dépend du nombre quantique K .

3.6.4 Parité et règles de sélection

La parité du système de 3 particules est donnée par

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \pi_3 (-)^{l_x + l_y} = \pi_1 \pi_2 \pi_3 (-)^K \quad (3.54)$$

où π_i est la parité intrinsèque de la particule i . Si les particules 2 et 3 sont identiques, nous avons la règle de sélection

$$(-)^{l_x + S + T} = -1 \quad (3.55)$$

où S et T sont le spin et l'isospin du système composé de ces particules (voir [11] et [16]).

3.7 Les transitions électriques

Pour un système de 3 particules, l'opérateur de transition électrique s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu}^E = e \sum_{i=1}^3 Z_i |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{CM}|^\lambda Y_\mu^\lambda(\Omega_{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{CM}}) \quad (3.56)$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, l'opérateur se réduit simplement à

$$\mathcal{M}_{00}^E = e \sum_{i=1}^3 Z_i \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (3.57)$$

Dans le cas où $\lambda > 0$, cet opérateur s'écrit dans le système des coordonnées hypersphériques sous la forme (voir [11]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= e \left[Z_{23} \left(-\frac{m_1}{M} \right)^\lambda + Z_1 \left(\frac{m_{23}}{M} \right)^\lambda \right] \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E(\mathbf{y}) \\ &+ e \left[Z_2 \left(-\frac{m_3}{m_{23}} \right)^\lambda + Z_3 \left(\frac{m_2}{m_{23}} \right)^\lambda \right] \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E(\mathbf{x}) \\ &+ e \sum_{k>0}^{\lambda-1} \alpha_{\lambda k} \left(-\frac{m_1}{M} \right)^k \left[Z_2 \left(-\frac{m_3}{m_{23}} \right)^{\lambda-k} + Z_3 \left(\frac{m_2}{m_{23}} \right)^{\lambda-k} \right] \\ &\times \left[\mathcal{M}_{k\mu}^E(\mathbf{y}) \otimes \mathcal{M}_{(\lambda-k)\mu}^E(\mathbf{x}) \right]^{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{23} = Z_2 + Z_3 \\ m_{23} = m_2 + m_3 \\ \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{\sqrt{\mu_{23}}} \right)^\lambda Y_\mu^\lambda(\Omega_x) \\ \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E(\mathbf{y}) = \left(\frac{y}{\sqrt{\mu_{23}^{(1)}}} \right)^\lambda Y_\mu^\lambda(\Omega_y) \\ \mu_{23} = \frac{m_2 m_3}{m_{23}} \\ \mu_{23}^{(1)} = \frac{m_{23} m_1}{M} \\ \alpha_{\lambda k} = \left[\frac{4\pi(2\lambda+1)!}{(2k+1)!(2\lambda-2k+1)!} \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Les coordonnées de Jacobi \mathbf{x} et \mathbf{y} sont celles de la première particule. Dans notre travail, nous allons considérer les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Nous aurons donc seulement des contributions venant des deux premiers termes, vu que le terme croisé apparaissant à l'ordre 2 est nul (pour les deux hypernoyaux étudiés, les deux particules externes sont identiques) et inexistant à l'ordre 1.

Nous pouvons calculer les éléments de matrice réduits correspondant à ces transitions, que nous appellerons M_y et M_x . La partie radiale sera résolue numériquement (voir chapitre suivant) et la partie angulaire analytiquement. Le résultat final se trouve en annexe E.

Chapitre 4

Méthodes numériques

4.1 Calcul des éléments de matrice $W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$

Nous allons utiliser les coefficients de Raynal-Revai pour calculer les éléments de matrice $W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$, qui sont une somme d'intégrales du type :

$${}^iW_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) = \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma'K'}^{J'M'^*}(\Omega_5) V_{jk} \left(\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) d\Omega_5 \quad (4.1)$$

Nous avons supposé que les potentiels ne dépendent que de la distance entre 2 particules, c'est-à-dire de la norme de la coordonnée de Jacobi $\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mu_{jk}}}$, ou encore de $\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}}$. Nous pouvons calculer analytiquement 4 des 5 intégrales incluses dans ${}^iW_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$: celles sur Ω_x et Ω_y . Commençons par passer de la base des harmoniques hypersphériques composées à la base des harmoniques hypersphériques par 3.32 et 3.35 :

$$\begin{aligned} {}^iW_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) &= \sum_{m_x m_y m'_x m'_y M_L M'_L M_S M'_S} (LSM_L M_S | JM)(L'S' M'_L M'_S | J'M') \\ &\times (l_x l_y m_x m_y | LM_L)(l'_x l'_y m'_x m'_y | L'M'_L) \int_{\Omega_5} \chi^{S'M'_S} \\ &\times \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) V_{jk} \left(\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega_5) \chi^{SM_S} d\Omega_5 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En utilisant l'expression de l'élément de volume 3.14, la définition des harmoniques hypersphériques 3.26, et l'orthogonalité des harmoniques sphériques, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^iW_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) &= \sum_{m_x m_y M_L M'_L M_S M'_S} (LSM_L M_S | JM)(L'S' M'_L M'_S | J'M') \\ &\times (l_x l_y m_x m_y | LM_L)(l'_x l'_y m'_x m'_y | L'M'_L) \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_{K'}^{l'_x l'_y}(\alpha_i) \chi^{S'M'_S} V_{jk} \left(\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) \chi^{SM_S} \phi_K^{l_x l_y}(\alpha_i) \\ &\times \sin^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_i d\alpha_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $\phi_K^{l_x l_y}(\alpha_i)$ est défini en 3.27. En supposant un potentiel ne dépendant pas du spin, et en utilisant la relation d'unitarité des coefficients de Clebsch-Gordan C.8 et la

définition de $\phi_K^{l_x l_y}(\alpha_i)$, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned}
{}^i W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho) &= \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \mathcal{N}_K^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K'}^{l_x l_y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha_i)^{2(l_x+1)} \\
&\times (\sin \alpha_i)^{2(l_y+1)} P_{n'}^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha_i) V_{jk} \left(\frac{\rho \cos \alpha_i}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha_i) d\alpha_i
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous allons transformer l'intégrale apparaissant dans 4.4 afin d'obtenir une intégrale du type $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$. Commençons par effectuer le changement de variables $v = \tan \frac{\alpha_i}{2}$. Les bornes que nous obtenons sont 0 et 1. Cependant l'intégrand est invariant pour le changement de signe $v \rightarrow -v$, et donc, l'intégrale vaudra la même chose qu'elle soit calculée entre 0 et 1 ou -1 et 0. Elle sera donc équivalente à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-v^2}{1+v^2} \right)^{2(l_x+1)} \left(\frac{2v}{1+v^2} \right)^{2(l_y+1)} P_{n'}^{l_y+1/2, l_x+1/2} \left(2 \left(\frac{1-v^2}{1+v^2} \right)^2 - 1 \right) \\
&\times V_{jk} \left(\frac{\rho \left(\frac{1-v^2}{1+v^2} \right)}{\sqrt{\mu_{jk}}} \right) P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2} \left(2 \left(\frac{1-v^2}{1+v^2} \right)^2 - 1 \right) \frac{2}{1+v^2} dv
\end{aligned} \tag{4.5}$$

En général, cette intégrale ne peut se calculer analytiquement, sauf pour certains potentiels (comme le potentiel harmonique par exemple, voir [13]). Nous allons utiliser une forme de quadrature de Gauss impliquant des polynômes de Legendre pour la calculer numériquement :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n \tag{4.6}$$

où les x_i sont les racines du polynôme de Legendre de degré n , $P_n(x)$ (voir annexe B), et où les w_i et R_n sont donnés par (voir [17]) :

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2) (P_n'(x_i))^2} \tag{4.7}$$

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) ((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \quad \text{avec} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \tag{4.8}$$

Le calcul des éléments de matrice $W_{K\gamma, K'\gamma'}(\rho)$ se composera du calcul de trois intégrales. La première se calculera directement par la méthode proposée ci-dessus, et les deux autres se ramèneront à une combinaison linéaire d'intégrales de ce type. Chaque intégrale sera donc effectuée par la quadrature de Gauss, avec un grand nombre de points (compris généralement entre 48 et 128) afin d'avoir une bonne convergence.

4.2 Résolution du système d'équations couplées

4.2.1 Introduction

Nous devons résoudre le système infini d'équations différentielles ordinaires du second ordre couplées

$$\begin{aligned} \forall \gamma, K : \left[\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1)}{\rho^2} \right) + (E - W_{K\gamma, K\gamma}(\rho)) \right] \chi_{\gamma K}^{J\pi}(\rho) \\ = \sum_{\gamma' K'} W_{K'\gamma', K\gamma}(\rho) \chi_{\gamma' K'}^{J'\pi'}(\rho) \end{aligned} \quad (4.9)$$

où la somme porte sur les valeurs de (γ', K') différentes de (γ, K) . Nous allons tronquer le système d'équations en imposant une limite supérieure K_M sur K . Rappelons que l_x et l_y doivent être tels que $n = (K - l_x - l_y)/2$ soit un entier positif ou nul. Par contre, ce système devra être résolu pour chaque valeur de L ($0, 1, \dots$) possible. Nous allons utiliser la méthode des réseaux de Lagrange pour résoudre le système. Nous contrôlerons également la convergence.

4.2.2 Principe de la méthode des réseaux de Lagrange

La méthode des réseaux de Lagrange consiste à développer la fonction inconnue sur une base particulière et à résoudre ensuite une sorte de problème aux valeurs propres. Le type de base envisagée étant crucial, nous allons commencer par décrire ses propriétés.

Soit un ensemble de réels u_i positifs ou nuls avec $i = 1, 2, \dots, n$, appelé *réseau de Lagrange*, et un ensemble de fonctions infiniment dérivables $f_i(u)$ possédant la *propriété de Lagrange*

$$f_i(u_j) = \lambda_i^{-1/2} \delta_{ij} \quad (4.10)$$

Cela signifie que chaque fonction $f_i(u)$ s'annule en tout point, à l'exception de u_i . Les constantes λ_i apparaissant dans l'équation 4.10 sont les poids intervenant dans l'approximation par quadrature de Gauss associée au réseau (voir [17])

$$\int_0^\infty g(u) du \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k g(u_k) \quad (4.11)$$

Remarquons que nous avons choisi l'intervalle $[0, \infty[$ pour définir le réseau car ρ varie sur cet intervalle, mais il existe des réseaux de Lagrange développés sur d'autres intervalles. De plus, si $g(u)$ est le produit d'une exponentielle négative e^{-u} et d'un polynôme de degré $2n - 1$, on impose l'exactitude de la quadrature de Gauss. Cette condition, ainsi que 4.10 définissent les paramètres λ_i , le réseau de points à utiliser et les fonctions $f_i(u)$.

Sur l'intervalle $[0, \infty[$, un réseau pratique est celui défini par les racines du polynôme de Laguerre de degré n , $L_n(u)$ (voir annexe B). Nous choisisons des fonctions de type

$$f_i(u) = (-)^i u_i^{1/2} \frac{L_n(u)}{u - u_i} e^{-\frac{u}{2}} \quad (4.12)$$

Il s'agit de la base de Lagrange-Laguerre ; les poids λ_i sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{e^{u_i}}{u_i [L'_n(u_i)]^2} \quad (4.13)$$

Les fonctions f_i sont orthogonales. Pour le démontrer, nous utilisons le fait que la quadrature de Gauss est exacte pour $f_i f_{i'}$ vu que nous avons là le produit d'une exponentielle négative et d'un polynôme de degré $2(n - 1)$ inférieur au degré limite $2n - 1$, et la propriété de Lagrange :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_i(u) f_{i'}(u) du &= \sum_k \lambda_k f_i(u_k) f_{i'}(u_k) \\ &= \sum_k \lambda_k \lambda_i^{-1/2} \delta_{ik} \lambda_{i'}^{-1/2} \delta_{i'k} \\ &= \sum_k \lambda_k \lambda_k^{-1/2} \delta_{ik} \lambda_k^{-1/2} \delta_{i'k} \\ &= \sum_k \delta_{ik} \delta_{i'k} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Et nous avons donc finalement, en simplifiant la somme,

$$\int_0^\infty f_i(u) f_{i'}(u) du = \delta_{ii'} \quad (4.15)$$

Calculons de la même manière les éléments de matrice d'un opérateur quelconque $A(u)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_i(u) A(u) f_{i'}(u) du &\approx \sum_k \lambda_k f_i(u_k) A(u_k) f_{i'}(u_k) \\ &\approx A(u_i) \delta_{ii'} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pour une dérivée seconde $-\frac{d^2}{du^2}$ (liée à l'énergie cinétique), nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_i(u) \left(-\frac{d^2}{du^2}\right) f_{i'}(u) du &= -\sum_k \lambda_k f_i(u_k) f_{i'}''(u_k) \\ &= -\lambda_i^{1/2} f_{i'}''(u_i) \end{aligned} \quad (4.17)$$

car la quadrature de Gauss est exacte dans ce cas-ci (la dérivée seconde de $f_i(u)$ est proportionnelle au produit d'un polynôme de degré $n - 1$ et d'une exponentielle négative, d'après l'équation 4.12).

4.2.3 Choix d'une base pour la méthode des réseaux de Lagrange

La méthode décrite dans cette section est expliquée dans l'article [11] et le Travail de Fin d'Etudes [13]. Les fonctions décrites en 4.12 ne sont pas correctes pour développer les fonctions radiales hypersphériques car elles ne satisfont pas leur comportement à l'origine. Nous allons les régulariser en les multipliant par une puissance de u afin que les nouvelles fonctions se comportent en $\rho^{K+5/2}$ (voir 3.49). Soit $\hat{f}_i(u)$ les fonctions régularisées :

$$\hat{f}_i(u) = \left(\frac{u}{u_i}\right)^m f_i(u) \quad (4.18)$$

Remarquons que le dénominateur en u_i^m nous permet de conserver la propriété de Lagrange pour ces fonctions. Le réseau de Lagrange est toujours défini par les racines de $L_n(u)$. Il nous reste à déterminer cette puissance m . Nous allons nous baser sur les considérations suivantes :

- Nous avons vu en 3.49 que le comportement à l'origine est en $\rho^{K+5/2}$. Ce n'est pas représentable en un nombre fini de puissances entières de ρ . Le facteur multiplicatif devra donc contenir une puissance demi-entière de u , et de préférence la plus proche possible de $5/2$.
- La résolution du système d'équations 3.47 implique de calculer des éléments de matrices en $1/\rho^2$. Nous voulons que la relation 4.16 pour $A = u^{-2}$ reste exacte. C'est le cas pour $m \leq 3/2$.

Nous allons donc choisir $m = 3/2$. On aura alors :

$$\hat{f}_i(u) = (-)^i \frac{u^{3/2}}{u_i} \frac{L_n(u)}{u - u_i} e^{-\frac{u}{2}} \quad (4.19)$$

Remarquons que par ce choix, la propriété de Lagrange 4.10 est toujours vérifiée, mais les relations 4.15 et 4.17 ne sont plus qu'approchées. En effet, pour l'équation 4.15 :

$$\int_0^\infty \hat{f}_i(u) \hat{f}_{i'}(u) du = \delta_{ii'} + (-)^{i-i'} \frac{2n+1+u_i+u_{i'}}{u_i u_{i'}} \quad (4.20)$$

Pour l'équation 4.17, nous allons introduire la matrice d'énergie cinétique (liée à l'opérateur de dérivée seconde, par sa définition) :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ii'} &= \int_0^\infty \hat{f}_i(u) \left(-\frac{d^2}{du^2}\right) \hat{f}_{i'}(u) du \\ &= \hat{T}_{ii'}^G + (-)^{i-i'} \frac{2n+1-u_i-u_{i'}}{4u_i u_{i'}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $\hat{T}_{ii'}^G = -\lambda_i^{1/2} \hat{f}_{i'}''(u_i)$ s'exprime, après calculs, et pour tout m :

$$\begin{cases} \hat{T}_{ii}^G &= \frac{-12m^2+24m-8+(4n+2)u_i-u_i^2}{12u_i^2} \\ \hat{T}_{ii'}^G &= (-)^{i-i'+1} \frac{u_{i'}^{m-3/2}}{u_i^{m-1/2}} \frac{(2m-3)u_{i'}-(2m-1)u_i}{(u_i-u_{i'})^2} \end{cases} \quad (4.22)$$

Dans le cas où m vaut $3/2$, on obtient donc :

$$\begin{cases} \hat{T}_{ii}^G &= \frac{1+(4n+2-u_i)u_i}{12u_i^2} \\ \hat{T}_{ii'}^G &= (-)^{i-i'} \frac{2}{(u_i-u_{i'})^2} \end{cases} \quad (4.23)$$

4.2.4 Résolution

Considérons le développement de la fonction radiale $\chi_{\gamma K}^{J\pi}$ sur les fonctions régularisées :

$$\chi_{\gamma K}^{J\pi} = h^{-1/2} \sum_{i=1}^n C_{\gamma K i}^{J\pi} \hat{f}_i(\rho/h) \quad (4.24)$$

où n est le nombre de fonctions de Lagrange, et h un paramètre qui doit être optimisé en fonction de la physique du problème. Il apporte un degré de liberté supplémentaire, et permet de déplacer les racines des fonctions de Lagrange (qui sont égales aux racines des polynômes de Laguerre, les u_i), afin qu'elles se trouvent dans le domaine où les fonctions radiales $\chi_{\gamma K}^{J\pi}$ ne sont pas négligeables. Ses unités sont les mêmes que celles de ρ , à savoir $[LM^{1/2}]$. Introduisons cela dans les équations 4.9 :

$$\sum_{\gamma' K' i'} (H_{\gamma K i, \gamma' K' i'}^{J\pi} - E \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{K K'} \delta_{ii'}) C_{\gamma' K' i'}^{J\pi} = 0 \quad (4.25)$$

où $H_{\gamma K i, \gamma' K' i'}^{J\pi}$ est défini par

$$H_{\gamma K i, \gamma' K' i'}^{J\pi} = \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{h^2} \hat{T}_{ii'}^G + \frac{(K+3/2)(K+5/2)}{x_i^2} \delta_{ii'} \right] \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{K K'} + W_{K'\gamma', K\gamma}(x_i) \delta_{ii'} \quad (4.26)$$

avec $x_i = hu_i$. La matrice d'énergie cinétique $\hat{T}_{ii'}$ est approchée par $\hat{T}_{ii'}^G$; ces deux matrices sont définies en 4.21 et 4.23.

L'équation 4.25 est une équation aux valeurs propres, dont la valeur propre est l'énergie E et dont les composantes du vecteur propre sont les coefficients $C_{\gamma K i}^{J\pi}$. Il faut résoudre cette équation afin d'exprimer les fonctions d'onde et les énergies correspondantes.

Le paramètre h se comporte comme le paramètre d'une méthode variationnelle. Dans la région de validité de l'approximation de Gauss, nous allons utiliser un théorème variationnel sur des kets d'essai formés par des combinaisons linéaires des fonctions de la base de Lagrange. L'énergie solution sera alors le minimum de l'énergie obtenue avec h variant. Remarquons que si l'on choisit un nombre de fonctions de base suffisamment élevé, l'énergie sera peu sensible aux variations de h .

Le nombre K_M apporte une contrainte sur le nombre minimum de vecteurs de la base de Lagrange. En effet, vu que les fonctions d'onde radiales $\chi_{\gamma K}^{J\pi}$ ont un comportement en $\rho^{K+5/2}$, il faut avoir des polynômes dont l'ordre va jusqu'à $K+5/2$. Or l'ordre du polynôme le plus élevé est $n+1/2$. Donc, nous avons $n \geq K_M + 2$.

4.2.5 Contrôle de la précision sur les coefficients $C_{\gamma Ki}^{J\pi}$ et convergence

La norme de la fonction d'onde totale vaut 1, puisqu'elle n'est pas modifiée par l'équation de Schrödinger. Le développement des fonctions d'onde 3.43, la normalisation des harmoniques hypersphériques 3.33, et la définition de l'élément de volume hypersphérique 3.14 conduisent à

$$\sum_{\gamma K} \langle \chi_{\gamma K}^{J\pi} | \chi_{\gamma K}^{J\pi} \rangle = 1 \quad (4.27)$$

En développant cela dans la base de Lagrange, nous obtenons

$$\sum_{\gamma Ki} |C_{\gamma Ki}^{J\pi}|^2 = 1 \quad (4.28)$$

Ces coefficients représentent les contributions des différentes fonctions radiales hypersphériques à la fonction d'onde totale.

Nous avons vu en 3.12 que le rayon en moyenne quadratique était lié à l'hyperrayon. Calculons $\langle \rho^2 \rangle$. Cet élément de matrice se sépare en une partie angulaire et une partie radiale. La partie angulaire est facilement résolue par l'orthogonalité des harmoniques hypersphériques. Il reste :

$$\langle \rho^2 \rangle = \sum_{\gamma K} \langle \chi_{\gamma K}^{J\pi} | \rho^2 | \chi_{\gamma K}^{J\pi} \rangle \approx \sum_{\gamma Ki} |C_{\gamma Ki}^{J\pi}|^2 (hx_i)^2 \quad (4.29)$$

Nous pouvons en déduire immédiatement le rayon en moyenne quadratique du niveau considéré grâce à cette équation 3.12.

La méthode décrite précédemment converge avec un petit nombre de fonctions dans la base, mais nécessite un grand nombre de calculs en raison des éléments de matrices $H_{\gamma Ki, \gamma' Ki'}^{J\pi}$. Sa taille vaut le produit entre le nombre d'équations et le nombre de fonctions de base. Il faudra donc une grande quantité d'espace mémoire pour stocker les données. Heureusement, la convergence est déjà assurée pour une vingtaine de fonctions de base. Pour plus de précision, nous utiliserons des bases comportant environ 100 fonctions.

4.3 Transitions électriques

En utilisant la technique des réseaux de Lagrange, nous pouvons calculer l'intégrale radiale apparaissant dans les éléments de matrice M_y et M_x (voir 3.58). Les développements et expressions complètes se trouvent en annexe E.

Chapitre 5

Interactions

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons différentes interactions :

- Les interactions NN et ΛN . Elles ne sont pas utilisées dans ce travail mais nous permettent de mettre en évidence des différences entre le Λ et le nucléon.
- Les interactions entre une particule α et un nucléon, un Λ ou une autre particule α . Elles nous serviront tout au long de notre étude.
- L'interaction entre deux particules Λ .

5.2 L'interaction NN

L'interaction nucléon-nucléon n'est pas parfaitement connue, mais les propriétés d'invariance qu'elle possède nous donnent un grand nombre d'informations sur sa forme. Nous savons que l'interaction NN :

- est une observable physique, c'est-à-dire qu'elle est hermitique, et symétrique vis-à-vis de l'échange de deux nucléons.
- est invariante par translation, transformation propre de Galilée, et rotation.
- est avec une très bonne approximation, invariante par parité, renversement du temps et indépendante de charge.

En négligeant tout effet à plus de 2 corps, nous concluons que dans l'espace des positions, des spins et des isospins, elle ne peut dépendre que des coordonnées relatives $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, de l'impulsion relative $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$, des spins \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 et des isospins \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 des deux nucléons. Il n'est pas nécessaire d'introduire des puissances des opérateurs d'isospin dans l'interaction (voir [16]). De la façon la plus générale possible, l'interaction s'écrira donc sous la forme

$$\begin{aligned}
 V_{NN}(\mathbf{r}) &= V_0(r) + V_\sigma(r)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + V_\tau(r) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 + V_{\sigma\tau}(r) (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2) \\
 &+ V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + V_{LS\tau}(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2) \\
 &+ V_T(r)S_{12} + V_{T\tau}(r)S_{12} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \\
 &+ V_Q(r)Q_{12} + V_{Q\tau}(r)Q_{12} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \\
S_{12} &= 4 \left(\frac{3}{r^2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \right) \\
Q_{12} &= 2 [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nous interprétons les différents termes de 5.1 comme ceci :

- Les 4 premiers termes correspondent à la partie centrale du potentiel, à laquelle on a ajouté la dépendance en spins. Cette partie commute avec \mathbf{L} , \mathbf{S} et \mathbf{J} ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$).
- Les 2 termes suivants traduisent la correction du potentiel en raison de l'interaction spin-orbite. Ils commutent avec \mathbf{J} , et conduisent à des potentiels distincts pour différentes valeurs de J , à L et S constants (par exemple trois états 3P_J avec $J = 0, 1, 2$). Dans le cas d'un système de deux nucléons, cette partie du potentiel commute avec \mathbf{L}^2 et \mathbf{S}^2 également, mais si le système comporte plus de deux nucléons, cette propriété n'est plus valable.
- Les 2 termes suivants correspondent aux termes tensoriels, dépendant de l'opérateur tensoriel S_{12} . Ils couplent des valeurs de L différant de deux unités lorsque le spin vaut 1, et expliquent entre autre l'état fondamental du deuton (qui est un mélange d'états S et D). Dans le cas d'un système de 2 nucléons, ils commutent avec \mathbf{S}^2 et \mathbf{J}^2 , sinon, uniquement avec \mathbf{J}^2 .
- Les 2 derniers termes correspondent à une correction du 2^{ème} ordre, et sont souvent négligés. Ils commutent avec \mathbf{J}^2 dans le cas général, et pour un système de 2 nucléons, avec \mathbf{L}^2 et \mathbf{S}^2 également.
- Remarquons que tous les termes sont doublés : ils apparaissent une première fois sans opérateur d'isospin et une deuxième fois multipliés par le produit $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2$ (ce qui satisfait l'indépendance de charge).

En ajustant les différents paramètres, nous arrivons aux différents potentiels réalistes comme le potentiel de Bonn, de Paris, du Minnesota,... Ces potentiels tendent tous asymptotiquement vers le potentiel OPEP (*one pion exchange potential*). Ce potentiel est lié au fait que l'interaction nucléaire forte peut être expliquée comme l'échange d'un pion virtuel entre deux nucléons (voir [18]).

5.3 L'interaction ΛN

5.3.1 Description générale

Nous ne pouvons modéliser le potentiel ΛN sous une forme OPEP, en raison de la conservation du nombre quantique d'isospin. En effet, le nucléon a un isospin $I = 1/2$, le Λ un isospin $I = 0$, et le pion un isospin $I = 1$. Les relations triangulaires entre les isospins ne sont donc pas vérifiées, ce qui implique l'impossibilité pour ces deux baryons d'échanger un pion. Par contre, nous pourrions utiliser une interaction basée sur l'échange de deux pions.

Pour un hyperon libre, l'interaction peut être mesurée directement, mais des difficultés furent rencontrées en raison de la faible intensité des faisceaux d'hyperons et de leur courte durée de vie. Les données expérimentales ne sont pas suffisantes pour valider un modèle convaincant de l'interaction ΛN (que ce soit un modèle basé sur l'échange de mésons, ou sur la chromodynamique quantique).

Dans les années 90, le groupe de Nijmegen (voir [22]) a développé une série de potentiels basés sur l'échange d'un boson (OBEP) en supposant exacte la symétrie $SU(3)$ (voir annexe A.2), et qui modélisent toutes les interactions NN et YN (où Y est un hyperon quelconque). Ils ont été la base de nombreux calculs sur la structure hypernucléaire. La profondeur du potentiel YN est environ $2/3$ de fois celle du potentiel NN (soit environ $30 - 35$ MeV).

En se basant sur la forme du potentiel trouvée sur base des calculs du groupe de Nijmegen et sur les expériences connues, l'interaction ΛN peut s'écrire sous la forme (voir [4]) :

$$V(r) = V_0(r) + V_S(r)(\mathbf{S}_N \cdot \mathbf{S}_Y) + V_T(r)S_{12} + V_{ls}(r)(\mathbf{L} \times \mathbf{S}^+) + V_{als}(r)(\mathbf{L} \times \mathbf{S}^-) \quad (5.3)$$

où S_{12} est l'opérateur tensoriel décrit dans le paragraphe précédent et $S^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_N \pm \mathbf{S}_Y)$ sont les combinaisons symétrique et antisymétrique des opérateurs de spin du nucléon et de l'hyperon. Cette expression dépend de 5 fonctions inconnues. Les différences majeures avec le potentiel NN sont :

- La présence du terme antisymétrique de spin-orbite (V_{als}), qui ne se trouve pas dans le potentiel NN en raison de l'indépendance de charge (voir [4]).
- La partie isospin, qui n'existe pas pour le potentiel ΛN . Cela est dû au fait que l'hyperon et le nucléon sont des particules tout à fait distinguables, et le principe d'exclusion de Pauli ne s'applique donc pas.

Le spin total du diquark $u - d$ étant nul, celui de l'hyperon Λ sera celui du quark s . Or les constantes de spin-orbite sont inversement proportionnelles à la masse. Il découle du modèle des quarks constituants que le terme de couplage spin-orbite est plus petit que le terme central $V_0(r)$. Néanmoins, il ne l'est pas suffisamment pour être négligé.

5.3.2 Potentiels de type coeur dur

Les premiers potentiels modélisant l'interaction ΛN proposés furent de type coeur dur. Parmi les plus célèbres, nous trouvons les potentiels de Herndon et Tang (voir [19]) ou de Deloff (voir [20]). La forme générale de ces potentiels est

$$V(r) = \frac{1 + P^\sigma}{2}(U_t(r) + \tau_3 W_t(r)) + \frac{1 - P^\sigma}{2}(U_s(r) + \tau_3 W_s(r)) \quad (5.4)$$

avec

$$U_i(r) = \begin{cases} \infty & (r < r_{\Lambda N}) \\ -U_{0i}e^{-\lambda_i(r-r_{\Lambda N})} & (r > r_{\Lambda N}) \end{cases} \quad i=s,t \quad (5.5)$$

$$W_i(r) = \begin{cases} \infty & (r < r_{\Lambda N}) \\ -W_{0i}e^{-\lambda_i(r-r_{\Lambda N})} & (r > r_{\Lambda N}) \end{cases} \quad i=s,t \quad (5.6)$$

$$P^\sigma = \frac{4\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + 1}{2} \quad (5.7)$$

où P^σ est l'opérateur d'échange des spins \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 des deux particules. $V_t(r)$ est donc le potentiel dans l'état triplet ($S = 1$) et $V_s(r)$ dans l'état singulet ($S = 0$). Les termes en $W_i(r)$ n'apparaissent que dans les potentiels de Deloff, et permettent de faire la différence entre le type de nucléon (rôle de la matrice de Pauli τ_3). L'allure du potentiel est semblable, quel que soit le spin total, le type de nucléon, ou le type de potentiel (voir figure 5.1).

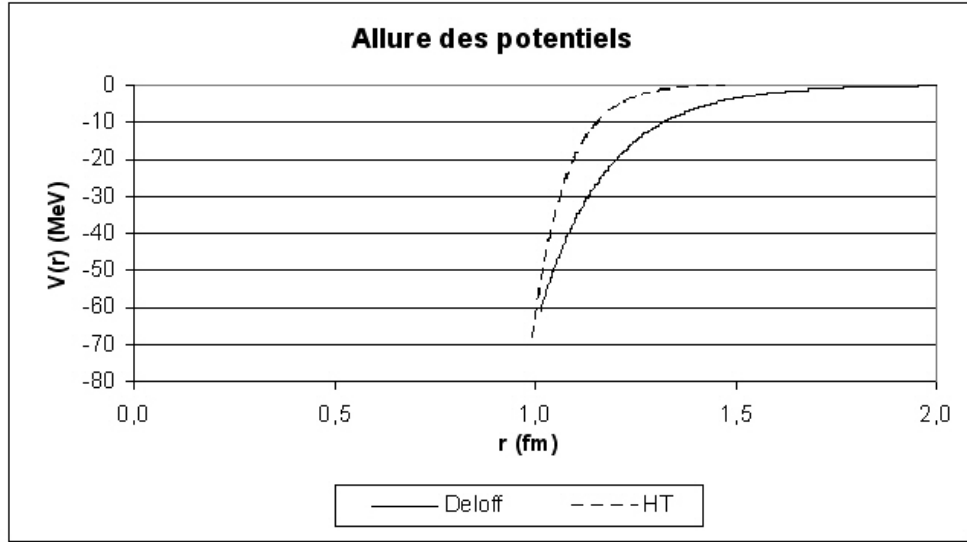


FIG. 5.1 – Allure du potentiel ΛN de Herndon et Tang de type I-D, pour l'état triplet, et du potentiel Λ proton de Deloff de type X, pour l'état singulet.

Les déphasages sont très semblables également, mais nous en rencontrons cependant deux types (voir figure 5.2). Les courbes sont similaires à celles calculées à partir des potentiels réalistes pour les 2 états de spin (voir paragraphe 5.3.3, et figure 5.4), mais les états de spin ne correspondent pas forcément.

Malheureusement, bien que ces potentiels n'étaient pas en contradiction avec les données expérimentales de l'époque (années 70-80), ils ne permettaient pas de conclure à propos de leur validité ou non. Par rapport aux données expérimentales actuelles, ces potentiels ne sont plus du tout valables. Les différences proviennent par exemple de possibles termes non centraux non pris en compte.

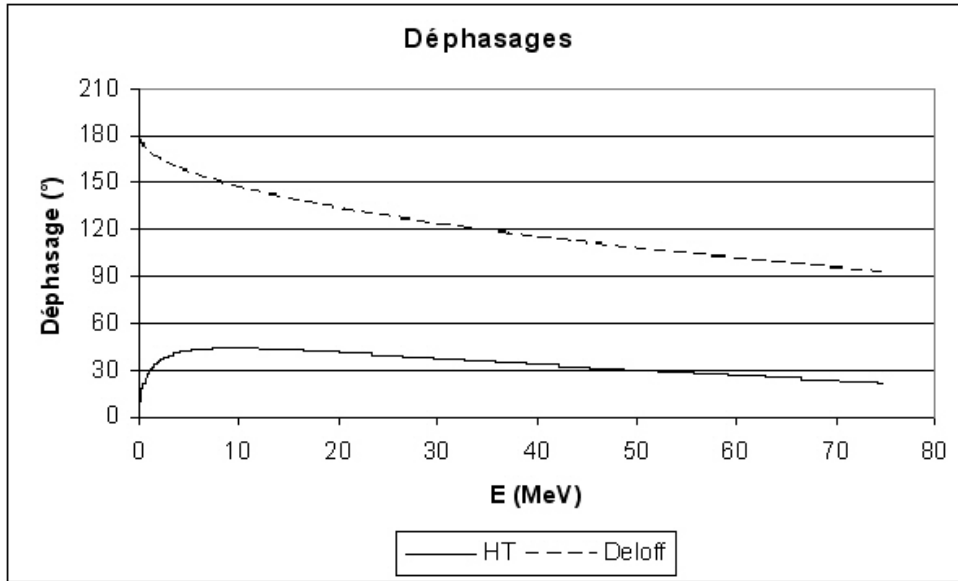


FIG. 5.2 – Déphasages en fonction de l'énergie pour le potentiel ΛN de Herndon et Tang de type I-C pour l'état singulet, et pour le potentiel Λ neutron de Deloff de type Y pour l'état triplet.

5.3.3 Potentiels réalistes

Potentiels de Hiyama, Kamimura, Motoba, Yamada, et Yamamoto

Il s'agit de potentiels non locaux, mais qui cadrent beaucoup mieux avec l'expérience que ceux de type coeur dur. Etant donné que nous limitons notre travail à des potentiels locaux, nous nous contenterons de donner un aperçu général de ces potentiels, en indiquant les références utiles pour trouver de plus amples informations. Ces potentiels comprennent un terme central, un terme de couplage spin-orbite, et également un terme modélisant une force à trois corps dans le cas où les systèmes comprennent plus de 2 corps (voir [21]).

Le terme central vient des résultats du groupe de Nijmegen, basé sur l'échange d'un boson (voir [22]). Les termes antisymétrique et symétrique de spin-orbite sont représentés par une somme de deux gaussiennes et le terme de force à 3 corps comme une différence de 2 gaussiennes (voir [21]).

Potentiel de Sparenberg-Baye

Ce potentiel est basé sur les résultats obtenus pour un modèle de quarks par le groupe de Fujiwara (Japon) et a été reconstruit à partir de calculs de déphasages

(voir [23]). Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 V(r) = & \left[-128 \exp(-0,8908r^2) + 1015 \exp(-5,383r^2) \right] \frac{1 - P^\sigma}{2} \\
 & + \left[-56,31 \exp(-0,7517r^2) + 1072 \exp(-13,74r^2) \right] \frac{1 + P^\sigma}{2} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Les déphasages et potentiels sont donnés par les figures 5.3 et 5.4 :

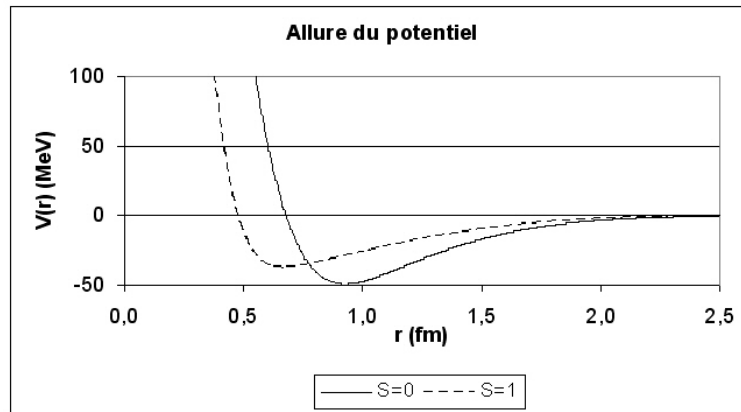


FIG. 5.3 – Allure du potentiel SB pour les états triplet et singulet.

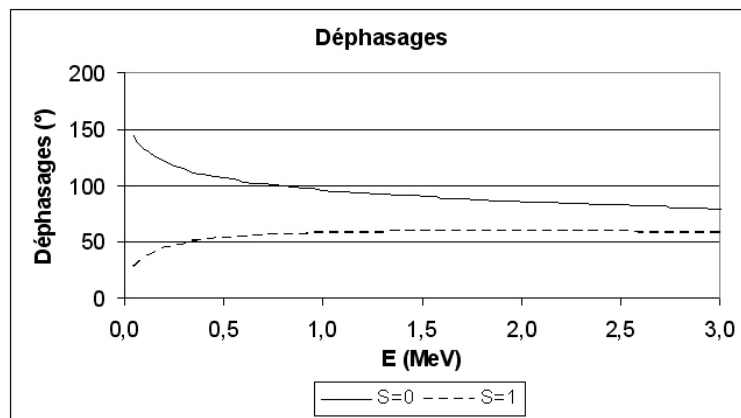


FIG. 5.4 – Déphasages pour le potentiel SB en fonction de l'énergie, pour les états triplet et singulet.

5.4 Interactions αN et $\alpha\alpha$

5.4.1 Potentiel αN

Nous choisirons un potentiel dépendant du nombre quantique L pour décrire l'interaction d'un système composé d'une particule α et d'un nucléon (voir [24]) :

$$V_{\alpha N}(r) = \begin{cases} V_{c1} \exp(-\eta_{c1}^2 r^2) + 2(\mathbf{LS})V_{ls1} \exp(-\eta_{ls1}^2 r^2) & (L \text{ pair}) \\ V_{c2} \exp(-\eta_{c2}^2 r^2) + 2(\mathbf{LS})V_{ls2} \exp(-\eta_{ls2}^2 r^2) & (L \text{ impair}) \end{cases} \quad (5.9)$$

où σ est le vecteur dont les composantes sont les trois matrices de Pauli. Les différents termes sont donnés par

$$V_k(r) = V_k \exp(-\eta_k^2 r^2) \quad (5.10)$$

avec comme valeurs pour les coefficients :

	V_{ci} (MeV)	η_{ci} (fm $^{-1}$)	V_{sli} (MeV)	η_{sli} (fm $^{-1}$)
$i = 1$	-66,580	0,6203	-12,169	0,8032
$i = 2$	-46,303	0,4321	-15,931	0,6282

Nous utiliserons le potentiel ci-dessus pour l'étude du ${}^9\text{Be}$, qui sera modélisé par un système $\alpha - \alpha - n$. L'article [24] montre que ce potentiel donne des résultats très satisfaisants pour un problème à 3 corps comportant deux particules α et un nucléon. L'allure du potentiel pour des valeurs du moment cinétique total L inférieures à 1 apparaît sur la figure 5.5.

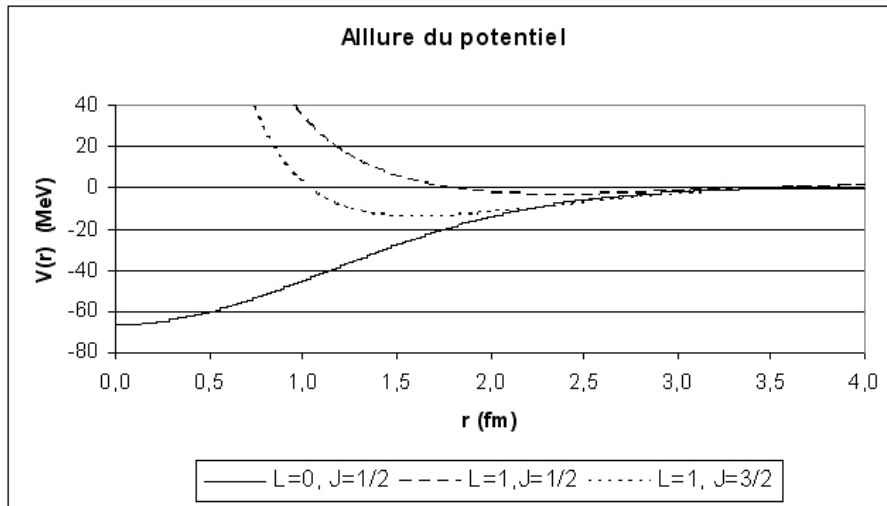


FIG. 5.5 – Allure du potentiel αN pour $L \leq 1$.

5.4.2 Description du problème des états interdits

Calculons les déphasages du potentiel 5.9 en fonction de l'énergie pour les premières valeurs de L :

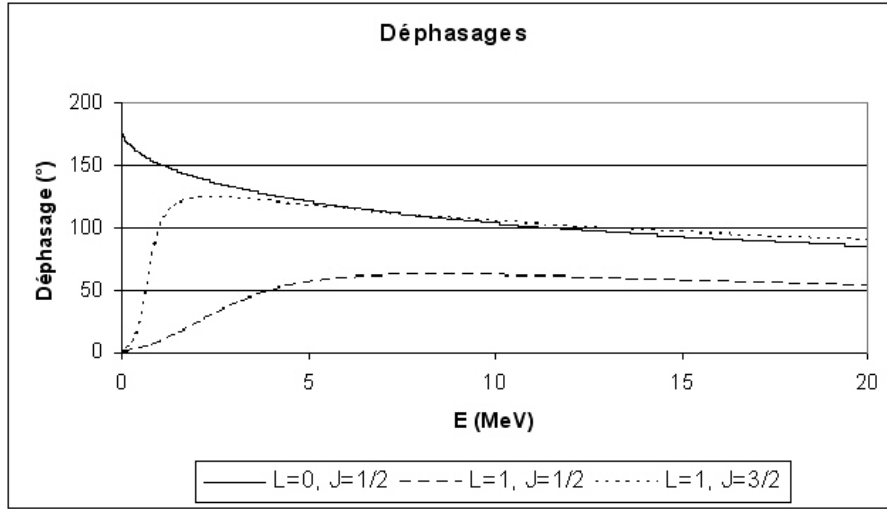


FIG. 5.6 – Déphasages en fonction de l'énergie du potentiel αN pour $L \leq 1$.

Rappelons le théorème de Levinson : si N_l est le nombre d'états liés pour une onde partielle l , alors

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = N_l \pi \quad (5.11)$$

où les déphasages sont exprimés en radians. En extrapolant la courbe de la figure 5.6 pour l'onde $L = 0$, on voit qu'il devrait exister un état lié $\alpha - n$. Or cet état n'est pas observé expérimentalement.

L'explication vient du fait que les calculs effectués ne tiennent pas compte de la structure interne de la particule α . D'un point de vue microscopique, nous avons un système de trois neutrons et de deux protons. D'après le modèle en couche et le principe de Pauli, le troisième neutron ne peut se trouver dans une couche de moment cinétique nul : la première couche ($n_r l j = 0s1/2$) est remplie par deux neutrons et le troisième se trouve alors dans la couche $n_r l j = 0p3/2$. Ainsi, la valeur du moment cinétique orbital total n'est pas nulle et l'état lié $L = 0$ déterminé par calcul n'est pas physique. Cet état fictif est appelé *état interdit*.

Il va falloir éliminer de tels états lors du traitement de l'équation de Schrödinger par la méthode décrite dans les chapitres précédents. Nous avons une relation importante entre le nombre d'états interdits n_i et le moment cinétique orbital total L :

$$2n_i + L = \text{cste} \quad (5.12)$$

Cette relation nous assure qu'il n'y a pas d'état interdit pour les autres valeurs de L dans le cas du potentiel décrit par l'équation 5.9, vu que la constante vaut 2 dans notre cas.

Nous pouvons nous affranchir de ce problème en annulant le potentiel lorsque les valeurs de l_x sont telles qu'elles font apparaître l'état interdit. De cette manière, le problème des états interdits n'est pas réellement traité mais plutôt contourné. Cependant, les résultats apportés par cette méthode sont plus que satisfaisants (voir les Travaux de Fin d'Etudes [13] et [14] par exemple). Dans notre travail, nous traiterons le problème en modifiant le potentiel d'après l'une des deux méthodes que nous allons décrire ci-dessous.

5.4.3 Traitement des états interdits : méthode des projecteurs

Description de la méthode

Comme expliqué dans le Travail de Fin d'Etudes [14] et dans l'article [11], cette méthode consiste à ajouter un terme correctif au potentiel qui permet de rejeter les états interdits suffisamment loin dans le spectre continu. Ainsi, ils n'influencent plus le calcul. Ce terme correctif s'exprime sous la forme d'une somme de projecteurs sur les états interdits. Dans la suite, ces états sont dénommés $|\psi_f(\mathbf{x})\rangle$, et ont une énergie E_f , avec f parcourant l'ensemble des états interdits à 2 corps associés au potentiel considéré. Remarquons qu'ils ne dépendent que de la coordonnée de Jacobi \mathbf{x} . Plaçons-nous dans le cadre d'un problème à 3 corps où chaque potentiel présente un ou plusieurs état(s) interdit(s). Le potentiel entre les particules i et j corrigé s'écrit :

$$\tilde{V}_{ij} = V_{ij} + \lambda \sum_f |\psi_f(\mathbf{x})\rangle \langle \psi_f(\mathbf{x})| \quad (5.13)$$

où λ est une constante positive (qui a les dimensions d'une énergie), choisie beaucoup plus grande que les énergies caractéristiques du système (généralement, λ est de l'ordre de 10^5 à 10^9 MeV). Comme dit ci-dessus, toute fonction d'onde contenant l'état interdit se voit rejetée très loin dans le spectre continu. En effet, soit $|\psi(\mathbf{x})\rangle$ une telle fonction d'onde, contenant l'état interdit f' , et qui peut se réécrire sous la forme

$$|\psi(\mathbf{x})\rangle = |\psi_0(\mathbf{x})\rangle + c|\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle \quad (5.14)$$

Nous pouvons calculer, pour cet état interdit f' , en appelant V la somme sur i et j des potentiels à 2 corps et \tilde{V} la somme des potentiels corrigés :

$$(T + \tilde{V})|\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle = (T + V)|\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle + \lambda \sum_f |\psi_f(\mathbf{x})\rangle \langle \psi_f(\mathbf{x})||\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle \quad (5.15)$$

où l'indice f parcourt cette fois les états interdits de tous les potentiels à 2 corps. En supposant que chaque état interdit n'apparaisse que dans un seul potentiel, on trouve finalement

$$(T + \tilde{V})|\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle = (E_{f'} + \lambda) |\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle \quad (5.16)$$

Ainsi, l'énergie de l'état $|\psi(\mathbf{x})\rangle$ défini en 5.14 a augmenté d'une énergie λ et cet état se trouve donc rejeté loin dans le spectre continu. Si l'état $|\psi_{f'}(\mathbf{x})\rangle$ apparaît dans plusieurs potentiels, l'énergie ajoutée n'en sera que plus grande. Cela ne change donc rien. Par contre, un état $|\psi(\mathbf{x})\rangle$ ne contenant pas d'état interdit ne sera pas influencé par les corrections, vu qu'il est orthogonal à chaque état $|\psi_f(\mathbf{x})\rangle$.

Résolution numérique

Supposons dans un premier temps que seul l'un des trois potentiels contienne un état interdit, et qu'il n'en contienne qu'un seul. Introduisons le projecteur

$$P = \sum_{slj} P_{lj} \quad (5.17)$$

avec

$$P_{lj} = \sum_m |\psi^{lsj}(x)Y^{lsjm}(\Omega_x)\rangle \langle \psi^{lsj}(x)Y^{lsjm}(\Omega_x)| \quad (5.18)$$

où $\psi^{lsj}(x)$ est la partie radiale de l'état interdit, et les fonctions angulaires $Y^{lsjm}(\Omega_x)$ sont définies par

$$Y^{lsjm}(\Omega_x) = [Y_l(\Omega_x) \otimes \chi^s]^{jm} \quad (5.19)$$

χ^s étant un spineur de spin s .

Nous allons décomposer la partie radiale sur une nouvelle base de fonctions de Lagrange $\hat{g}_i(x/h_2)$ de sorte qu'elle s'écrive

$$\psi^{lsj}(x) = h_2^{-1/2} \sum_{k=1}^{N_2} D_k^{lsj} \hat{g}_k(x/h_2) \quad (5.20)$$

où N_2 est le nombre de fonctions de base et h_2 le facteur d'échelle adapté au problème à 2 corps. Dans ce cas-ci, l'indice m de l'équation 4.18 vaut 1. Nous aurons donc deux réseaux de Lagrange différents : un pour le problème à trois corps et un pour éliminer les états interdits à deux corps.

Dans le cas où plusieurs états interdits sont à traiter, les formules ci-dessus restent correctes, à condition de rajouter un indice f dans les sommations et fonctions d'onde. Remarquons que puisque le projecteur P_{lj} est multiplié par une constante λ élevée, nous pouvons voir s'amplifier les imprécisions numériques. Ainsi, il faudra connaître très précisément les fonctions radiales $\psi^{lsj}(x)$.

Calcul des éléments de matrice du projecteur

Dans la base du réseau de Lagrange lié à la résolution du problème à trois corps, la fonction d'onde s'écrira comme une somme sur i de terme de la forme

$$\tilde{\Phi}_{\gamma Ki}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM}(\Omega_5) \hat{f}_i(\rho/h) \quad (5.21)$$

où π est la parité de l'onde partielle $\tilde{\Phi}_{\gamma Ki}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et est définie au paragraphe 3.5.4.

On a donc à calculer les éléments de matrice du projecteur dans la base des $\tilde{\Phi}_{\gamma Ki}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, qui sont à rajouter dans le système d'équations 4.9. La fonction d'onde à 3 corps est donnée dans le mode de couplage $[(l_x l_y) L(s_x s_y) S] J$ où s_x et s_y sont les spins des deux particules considérées, et celle du projecteur dans le mode $[(l_x(s_x s_y) S] j l_y) J$. Il nous faut donc effectuer un changement de base afin de calculer les éléments de matrice du projecteur. On obtient (voir [11])

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_{\gamma Ki}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \psi^{lsj}(x) Y^{lsjm}(\Omega_x) \rangle &= \delta_{l_x} \sum_{j_y} (jm j_y (M - m) | JM) \\ &\times W(l, s, j, l_y, s_y, j_y, L, S, J) \\ &\times Y^{l_y s_y j_y m_y}(\Omega_y) \varphi_{\gamma Ki, j}^{J\pi}(y) \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec

$$\begin{aligned} W(l, s, j, l_y, s_y, j_y, L, S, J) &= [(2j + 1)(2j_y + 1)(2L + 1)(2S + 1)]^{1/2} \\ &\times \begin{Bmatrix} l_x & s_x & j \\ l_y & s_y & j_y \\ L & S & J \end{Bmatrix} \\ \varphi_{\gamma Ki, j}^{J\pi}(y) &= \mathcal{N}_K^{l_x l_y} \int_0^\infty \frac{x^{l_x+2} y^{l_y}}{(x^2 + y^2)^{(l_x+l_y)/2}} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\times \hat{f}_i \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h} \right) \psi^{lsj}(x) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

La dernière égalité peut se calculer par l'approximation de Gauss après développement sur une base de Lagrange (le deuxième réseau mentionné dans le paragraphe précédent) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma Ki, j}^{J\pi}(y) &= \mathcal{N}_K^{l_x l_y} h_2^{1/2} \sum_{k=1}^{N_2} \lambda_{2k}^{1/2} D_k^{lsj} \frac{x_k^{l_x+2} y^{l_y}}{(x_k^2 + y^2)^{(l_x+l_y)/2}} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2} \left(\frac{x_k^2 - y^2}{x_k^2 + y^2} \right) \\ &\times \hat{f}_i \left(\frac{\sqrt{x_k^2 + y^2}}{h} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec $x_k = h_2 u_k$, u_k étant le $k^{\text{ième}}$ point du réseau de Lagrange. L'élément de matrice du projecteur s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} M &= \langle \tilde{\Phi}_{\gamma Ki}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | P_{lj} | \tilde{\Phi}_{\gamma' K' i'}^{JM\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \\ &= \delta_{l_x} \delta_{l_x'} \delta_{l_y} \delta_{l_y'} \sum_{j_y} W(l, s, j, l_y, s_y, j_y, L', S', J) W(l, s, j, l_y, s_y, j_y, L, S, J) \\ &\times \int_0^\infty y^2 \varphi_{\gamma Ki, j}^{J\pi}(y) \varphi_{\gamma' K' i', j}^{J\pi}(y) dy \end{aligned} \quad (5.25)$$

L'intégrale sur y sera évaluée par la méthode des trapèzes.

5.4.4 Traitement des états interdits : méthode supersymétrique

Cette méthode consiste à remplacer les potentiels $V_{ij}(\mathbf{x})$ décrivant l'interaction entre 2 des 3 corps par leurs partenaires supersymétriques. Les potentiels partenaires supersymétriques dont nous parlons sont équivalents aux potentiels de départ pour ce qui est des niveaux d'énergie, des déphasages, et des sections efficaces de diffusion, mis à part le fait qu'ils ne contiennent pas les états interdits, dont le rôle est simulé par un coeur répulsif à courte portée.

L'équation de Schrödinger radiale pour une onde partielle l (nous sous-entendrons l'indice l dans la suite de ce paragraphe) s'écrit

$$H_0\psi_0 = \left(-\frac{d^2}{dr^2} + V_0 \right) \psi_0 = E\psi_0 \quad (5.26)$$

où ψ_0 est le produit entre r et la fonction d'onde radiale et où E est l'énergie dans le repère du centre de masse. Les unités sont choisies de sorte que le rapport $\hbar^2/2m$ soit égal à l'unité. Le terme potentiel inclut les termes nucléaire, coulombien et centrifuge. Cet hamiltonien peut se factoriser sous la forme (voir [25])

$$H_0 = A_0^+ A_0^- + \mathcal{E}_0 \quad (5.27)$$

où \mathcal{E}_0 est l'énergie de factorisation, et où les opérateurs A_0^+ et A_0^- sont définis par

$$A_0^- = (A_0^+)^{\dagger} = -\frac{d}{dr} + \frac{d(\ln(\psi_0(\mathcal{E}_0)))}{dr} \quad (5.28)$$

où $\psi_0(\mathcal{E}_0)$ est une solution de 5.26 d'énergie \mathcal{E}_0 . On appelle partenaire supersymétrique de H_0 l'hamiltonien H_1 défini par

$$H_1 = A_0^- A_0^+ + \mathcal{E}_0 \quad (5.29)$$

Ces deux hamiltoniens correspondent presque au même spectre d'énergie. En effet, la comparaison entre 5.27 et 5.29 montre qu'on a la relation

$$\psi_1(E) = (E - \mathcal{E}_0)^{-1/2} A_0^- \psi_0(E) \quad (5.30)$$

ce qui signifie que chaque fonction propre de H_0 correspond à une fonction propre de H_1 de même valeur propre, mis à part celles où $A_0^- \psi_0(E)$ est nul. Remarquons que cette équation n'est pas valable si $E = \mathcal{E}_0 = E_0^{(0)}$ (cela se déduit de l'équation 5.28). Nous allons choisir $\mathcal{E}_0 = E_0^{(0)}$, l'énergie du fondamental de H_0 . Ce choix rend les deux spectres semblables, mis à part le premier niveau de H_0 qui n'a pas d'équivalent dans H_1 . On définit ensuite le potentiel partenaire supersymétrique de V_0 , appelé V_1 et tel que H_1 s'écrit

$$H_1 = -\frac{d^2}{dr^2} + V_1 \quad (5.31)$$

Et donc,

$$V_1 = V_0 - 2 \frac{d^2(\ln(\psi_0(E_0^{(0)})))}{dr^2} \quad (5.32)$$

Cependant, les déphasages entre les deux potentiels sont différents. Pour remédier à ce problème, nous allons appliquer une transformation supersymétrique au potentiel V_1 . Nous obtenons un hamiltonien H_2 . L'énergie de factorisation choisie dans ce cas-ci est toujours le fondamental de H_0 , et les spectres de H_2 et H_1 sont identiques.

Ainsi, en appliquant la transformation

$$V_2 = V_0 - 2 \frac{d^2}{dr^2} \left[\ln \left(\int_0^r |\psi_0(E_0^{(0)})|^2 dr \right) \right] \quad (5.33)$$

nous obtenons un nouveau potentiel allant amener au même spectre d'énergie et aux mêmes déphasages que le potentiel de départ, mis à part le fondamental. Or si le premier niveau de l'hamiltonien est un état interdit, celui-ci est maintenant éliminé du spectre.

5.4.5 Interaction $\alpha\alpha$: potentiel BFW

Dans notre travail, nous allons utiliser plusieurs potentiels décrivant l'interaction entre deux particules α . L'un d'eux est le potentiel BFW. Il a été proposé en 1977 par B. Buck, H. Friedrich et C. Wheatley et permet de reproduire les données expérimentales de la diffusion $\alpha\alpha$ sans considérer la structure interne des deux particules. Depuis, il a été montré que de nombreuses autres propriétés (résonances diverses, niveaux rotationnels,...) sont prédites avec une bonne précision en utilisant un système de particules α dont l'interaction entre deux d'entre elles est décrite par ce potentiel-là, plutôt qu'un système de neutrons et protons (voir [26]).

Le potentiel s'écrit sous la forme

$$V(r) = -V_0 \exp(-\alpha r^2) + 4 \frac{\operatorname{erf}(\beta r)}{r} e^2 \quad (5.34)$$

avec

$$\begin{cases} V_0 &= 122,6225 \text{ MeV} \\ \alpha &= 0,22 \text{ fm}^{-2} \\ \beta &= 0,75 \text{ fm}^{-1} \end{cases} \quad (5.35)$$

Les valeurs des paramètres ont été ajustées afin que la résonance du ^8Be à $92,12 \pm 0,05$ keV soit reproduite et que le saut du déphasage de l'onde partielle $L = 2$ se passe vers 3 MeV. Le potentiel est nul pour les valeurs impaires de L , étant donné que la particule α est un boson, et que la fonction d'onde de 2 bosons identiques doit être symétrique (une valeur de L impaire entraînerait une fonction d'onde anti-symétrique).

Le premier terme vient de la diffusion entre 2 particules α alors que le deuxième est purement coulombien. Nous pouvons voir l'allure du potentiel sur la figure 5.7 et les déphasages sur la figure 5.8.

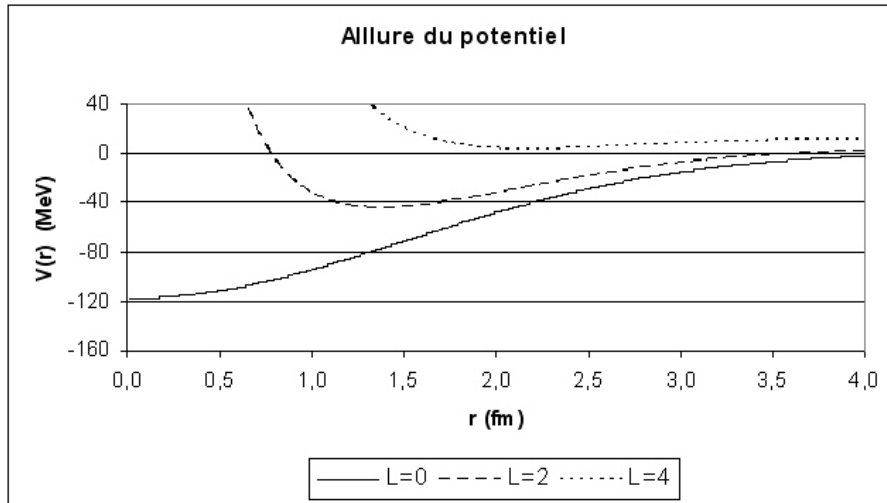


FIG. 5.7 – Allure du potentiel BFW pour différentes ondes partielles.

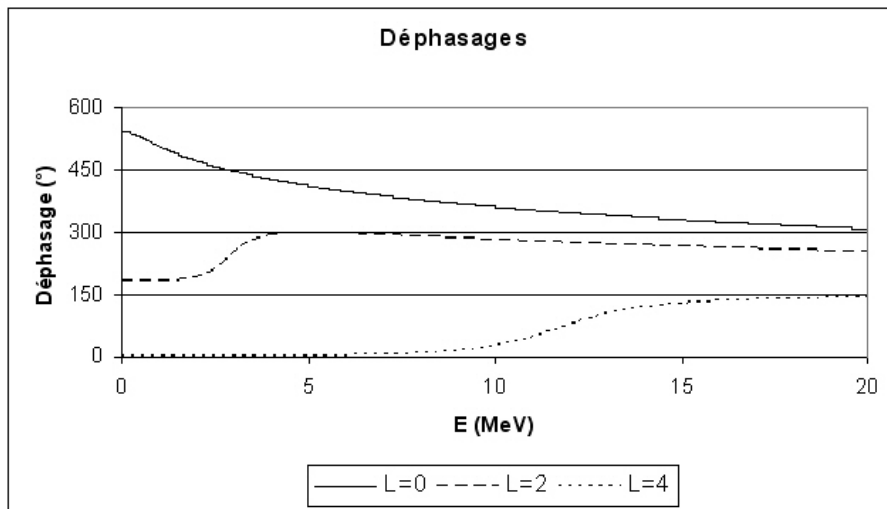


FIG. 5.8 – Déphasages en fonction de l'énergie du potentiel BFW pour différentes ondes partielles.

Le déphasage de l'onde $L = 0$ commence en fait à 360° . Mais il y a un saut d'environ 180° vers le haut à 92 keV, qui ne se voit pas sur la figure 5.8 en raison de l'échelle en énergie qui n'est pas assez fine. Les données expérimentales nous indiquent qu'il n'y a pas d'état lié du ${}^8\text{Be}$, quelle que soit la valeur de L . D'après le théorème de Levinson 5.11, nous concluons qu'il y aura deux états interdits pour l'onde $L = 0$ et un état interdit pour l'onde $L = 2$. La constante apparaissant dans la relation 5.12 vaut donc 4.

5.4.6 Interaction $\alpha\alpha$: potentiel d'Ali-Bodmer

Le deuxième potentiel modélisant l'interaction $\alpha\alpha$ que nous allons utiliser a été proposé par S. Ali et A.R. Bodmer en 1966. Il vient de données expérimentales de diffusion $\alpha\alpha$ et d'études théoriques de cette interaction. La façon dont les différents paramètres ont été calculés est détaillée dans l'article [27]. Ce potentiel dépend des valeurs de L . Il s'écrit

$$V(r) = V_r \exp(-\mu_r^2 r^2) - V_a \exp(-\mu_a^2 r^2) + 4 \frac{\text{erf}(\beta r)}{r} e^2 \quad (5.36)$$

avec

	V_r (MeV)	μ_r (fm $^{-1}$)	V_a (MeV)	μ_a (fm $^{-1}$)	β (fm $^{-1}$)
$L = 0$	500	0,7	-130	0,475	0,6
$L = 2$	320	0,7	-130	0,475	0,6
$L \geq 4$	0	0	-130	0,475	0,6

Ce potentiel comporte un terme répulsif qui est complètement masqué par le terme centrifuge du potentiel effectif pour $L \geq 4$. Le deuxième terme est un terme attractif, indépendant de L . Finalement, le dernier terme est l'interaction coulombienne. Pour les mêmes raisons que pour le potentiel BFW, ce potentiel est nul pour les valeurs impaires de L . Nous pouvons observer la forme de ce potentiel à la figure 5.9

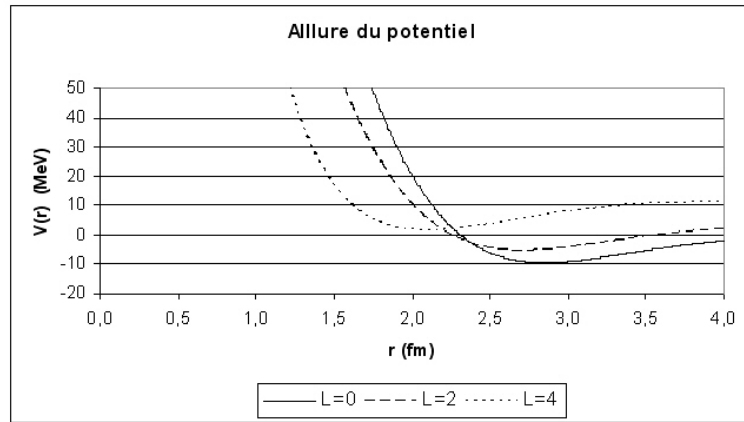


FIG. 5.9 – Allure du potentiel d'Ali-Bodmer pour différentes ondes partielles.

Tout comme pour le potentiel BFW, le déphasage pour l'onde $L = 0$ démarre en 0, et fait un saut de 180° à 92 keV. Cela ne se remarque pas sur la figure en raison du pas en énergie (voir figure 5.10). D'après le théorème de Levinson 5.11, nous concluons que ce potentiel ne présente aucun état interdit.

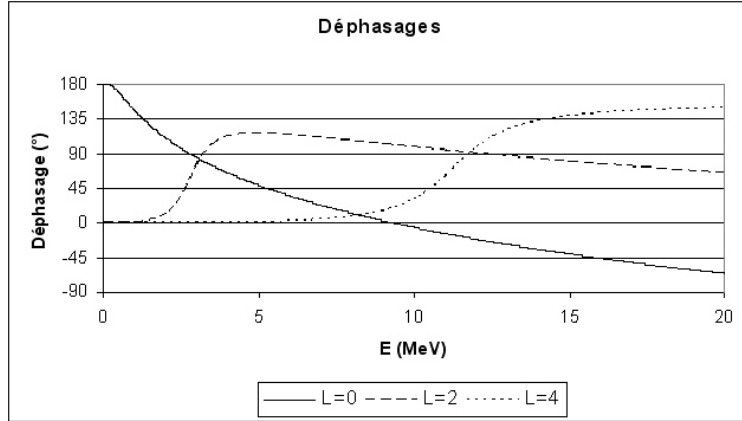


FIG. 5.10 – Déphasages en fonction de l'énergie du potentiel d'Ali-Bodmer pour différentes ondes partielles.

5.5 L'interaction $\alpha\Lambda$

5.5.1 Généralités

Avant les années 80, l'interaction $\alpha\Lambda$ était modélisée par des potentiels dit *conventionnels*, comprenant une seule gaussienne. A partir des années 80, des informations très précises concernant les désintégrations mésoniques d'hypernoyaux dont les nombres de masses étaient $A = 4$ et $A = 5$ commencèrent à être disponibles, et des potentiels plus réalistes purent être proposés. Nous allons comparer ces deux types de potentiels : le potentiel SG (pour *single-range Gaussian form*) et le potentiel Isle (un potentiel réaliste). Des informations plus précises concernant ces deux potentiels peuvent être trouvées dans l'article [28] et dans les sections suivantes.

5.5.2 Potentiel SG

Il s'agit d'un potentiel conventionnel. Il a la forme d'une gaussienne unique et s'écrit

$$V(r) = -43,92 \exp \left[- \left(\frac{r}{1,566} \right)^2 \right] \quad (5.37)$$

Les différents paramètres du potentiel sont ajustés de façon à reproduire l'énergie de liaison de l'hypernoyau ${}^5_{\Lambda}\text{He}$. L'allure du potentiel se trouve sur la figure 5.11, (terme centrifuge inclus).

Les déphasages de la figure 5.12 et le théorème de Levinson (équation 5.11) nous indiquent l'existence d'un état lié pour l'onde $L = 0$. Il s'agit du ${}^5_{\Lambda}\text{He}$, qui est observé expérimentalement. Il n'y a donc pas d'état interdit pour ce potentiel.

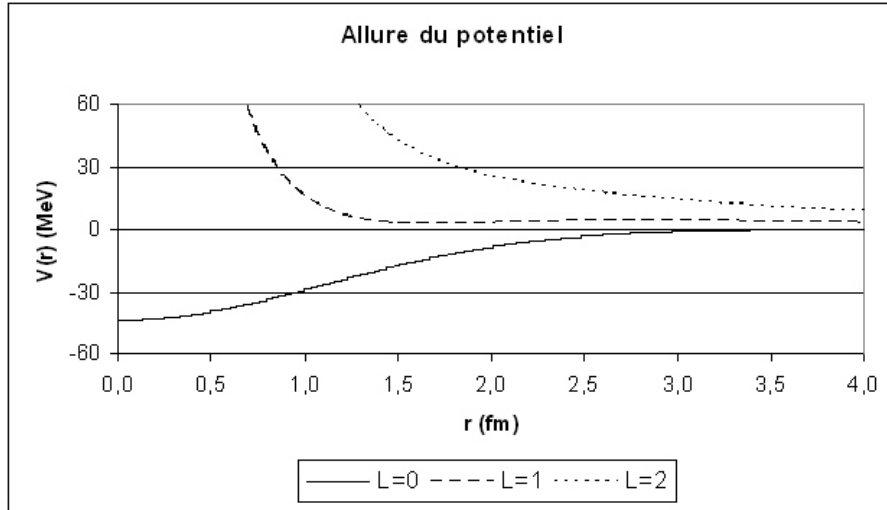


FIG. 5.11 – Allure du potentiel SG pour différentes ondes partielles.

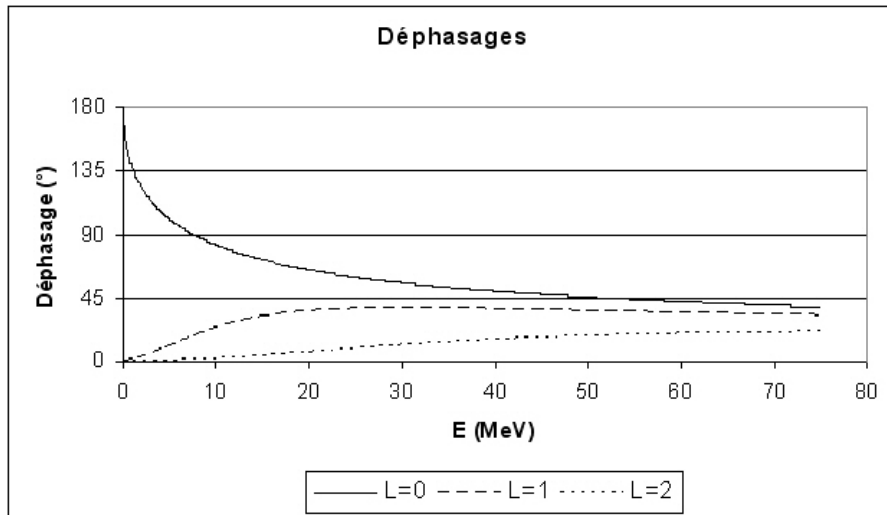


FIG. 5.12 – Déphasages en fonction de l'énergie du potentiel SG pour différentes ondes partielles.

5.5.3 Potentiel Isle

Ce potentiel a été conçu par Kurihara et ses collaborateurs sur base de désintégrations mésoniques d'hypernoyaux (des informations sont disponibles dans l'article [28]). Il comporte un terme attractif et un terme répulsif :

$$V(r) = 450,4 \exp \left[- \left(\frac{r}{1,25} \right)^2 \right] - 404,9 \exp \left[- \left(\frac{r}{1,41} \right)^2 \right] \quad (5.38)$$

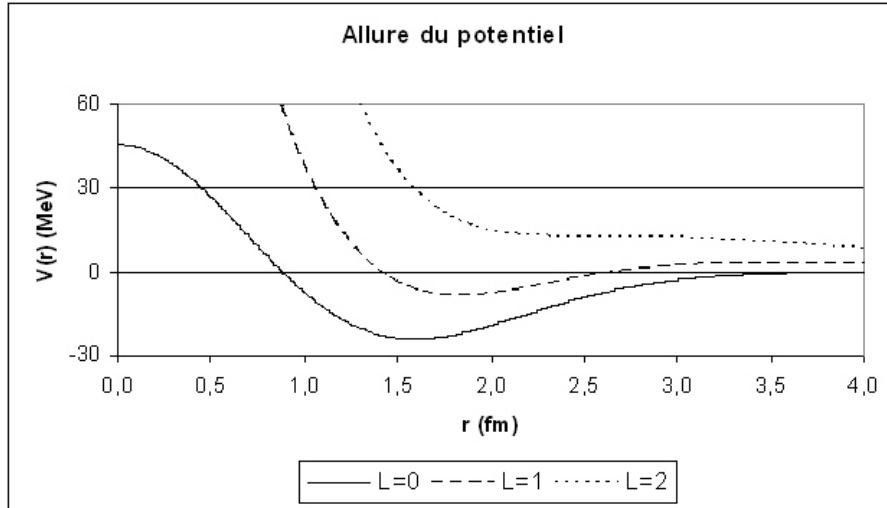


FIG. 5.13 – Allure du potentiel Isle pour différentes ondes partielles.

Tout comme le potentiel SG, les paramètres sont ajustés de façon à reproduire l'énergie de liaison du ${}^5_{\Lambda}\text{He}$. L'allure du potentiel pour différentes ondes partielles, terme centrifuge inclus est donnée par la figure 5.13. Les déphasages ont la même allure que pour le potentiel SG (voir figure 5.12).

5.6 Potentiel $\Lambda\Lambda$

5.6.1 Introduction

Nous allons utiliser et comparer deux différents potentiels $\Lambda\Lambda$ dans l'étude de l'hypernoyau ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$. Le premier est le potentiel de Sparenberg-Baye pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ (potentiel SB), déterminé à partir de calculs venant d'un modèle de quarks, et le deuxième est le potentiel de Hiyama, Kamimura, Motoba, Yamada et Yamamoto déterminé à partir des résultats et études du groupe de Nijmegen.

5.6.2 Potentiel SB

Comme pour le potentiel SB pour l'interaction ΛN , le potentiel SB pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ est déterminé à partir des résultats obtenus pour un modèle de quarks par le groupe de Fujiwara (Japon) et a été reconstruit à partir de calculs de déphasages (voir [23]). Il s'écrit

$$V(r) = -103,9 \exp[-1,176r^2] + 658,2 \exp[-5,936r^2] \quad (5.39)$$

et présente l'allure de la figure 5.14 pour les premières ondes partielles, terme centrifuge inclus.

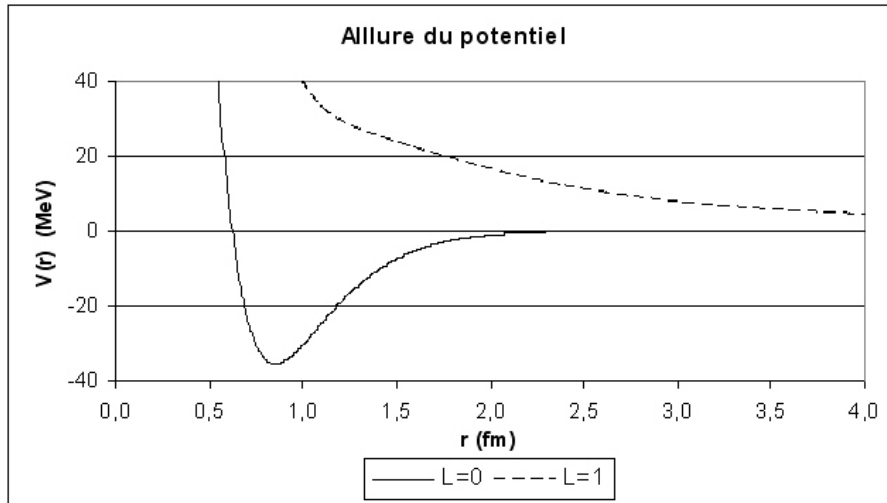


FIG. 5.14 – Allure du potentiel SB pour l’interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

En étudiant les déphasages des figures 5.15 (basses énergies) et 5.16 (hautes énergies), en utilisant le théorème de Levinson et les données expérimentales (il n’y a pas d’état lié de deux particules Λ), nous voyons que ce potentiel ne présente aucun état interdit.

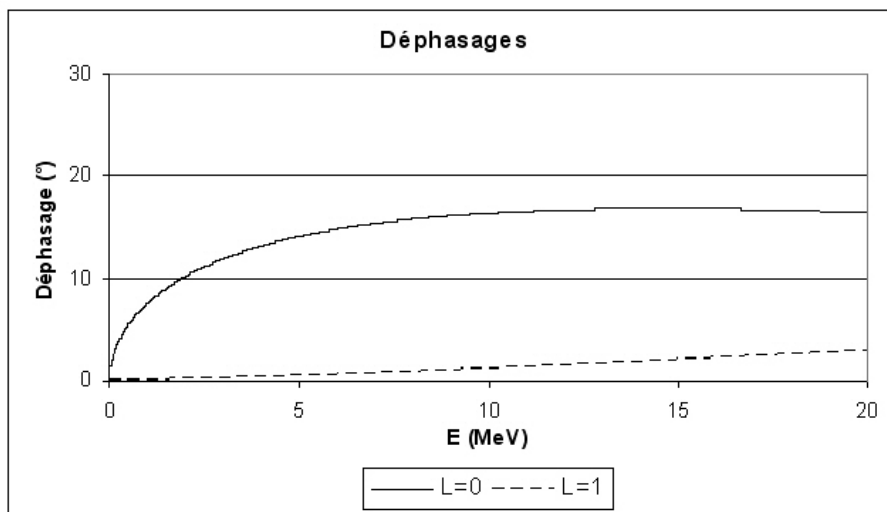


FIG. 5.15 – Déphasages aux basses énergies en fonction de l’énergie du potentiel SB pour l’interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

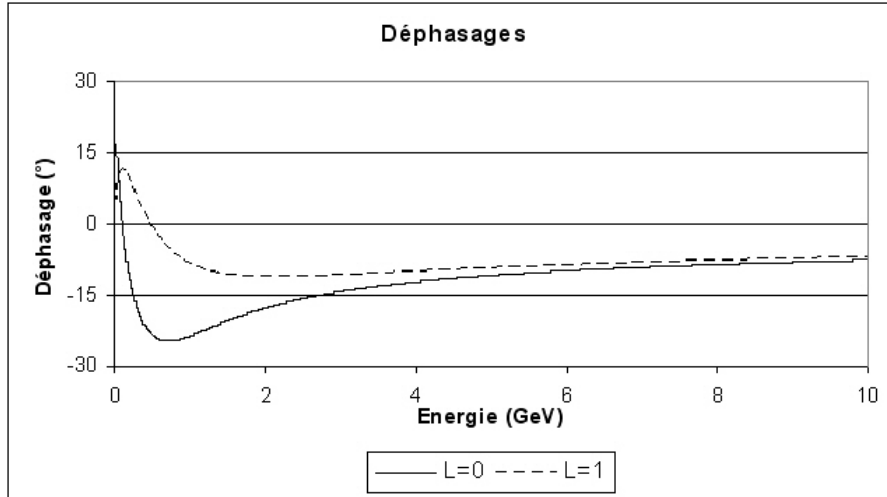


FIG. 5.16 – Déphasages aux hautes énergies en fonction de l'énergie du potentiel SB pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

5.6.3 Potentiel de Hiyama, Kamimura, Motoba, Yamada et Yamamoto

Ce potentiel a été conçu à partir des modèles OBE du groupe de Nijmegen. Les paramètres ont été fixés de façon à reproduire les résultats de l'événement Nagara (voir article [8] et paragraphe 2.5.4). Ce potentiel tient compte des différents états de spin possibles des deux Λ . Plus d'informations se trouvent dans l'article [29]. Il s'écrit :

$$V(r) = \sum_{i=1}^3 (v_i + 4v_i^\sigma \mathbf{s}_\Lambda \cdot \mathbf{s}_\Lambda) \exp(-\mu_i r^2) \quad (5.40)$$

avec comme valeurs pour les différents paramètres :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
μ_i	0,555	1,656	8,163
v_i	-10,67	-93,51	4884
v_i^σ	0,0966	16,08	915,8

L'allure du potentiel pour les premières ondes partielles peut se voir sur la figure 5.17. En analysant les courbes des déphasages 5.18 (basses énergies) et 5.19 (hautes énergies), nous pouvons observer que ce potentiel ne présente pas d'état interdit, tout comme le potentiel SB.

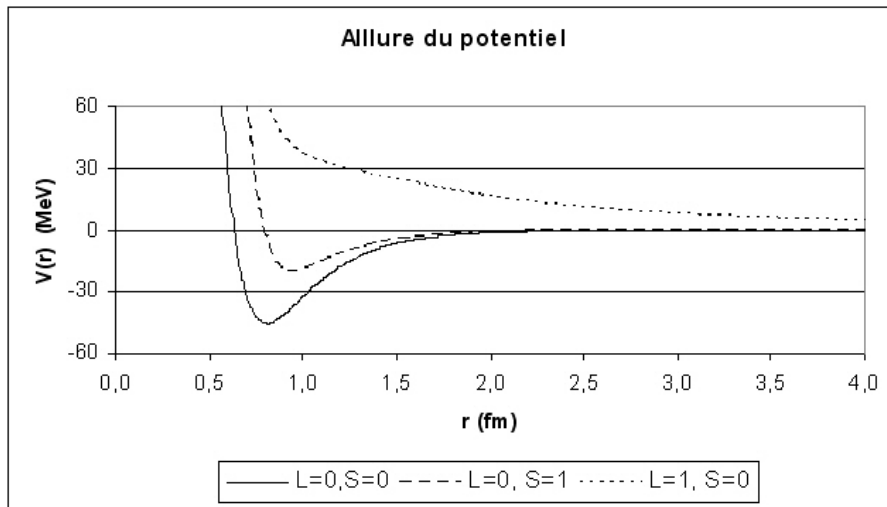


FIG. 5.17 – Allure du potentiel de Hiyama pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

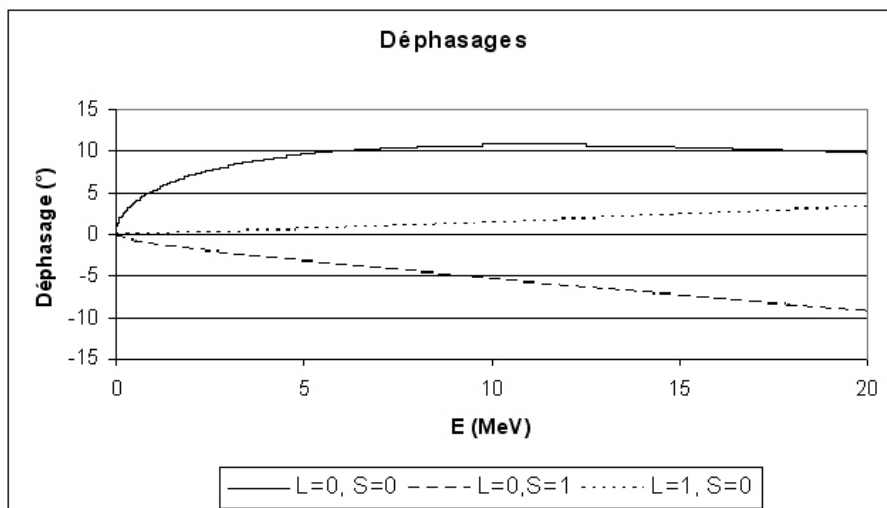


FIG. 5.18 – Déphasages aux basses énergies en fonction de l'énergie du potentiel de Hiyama pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

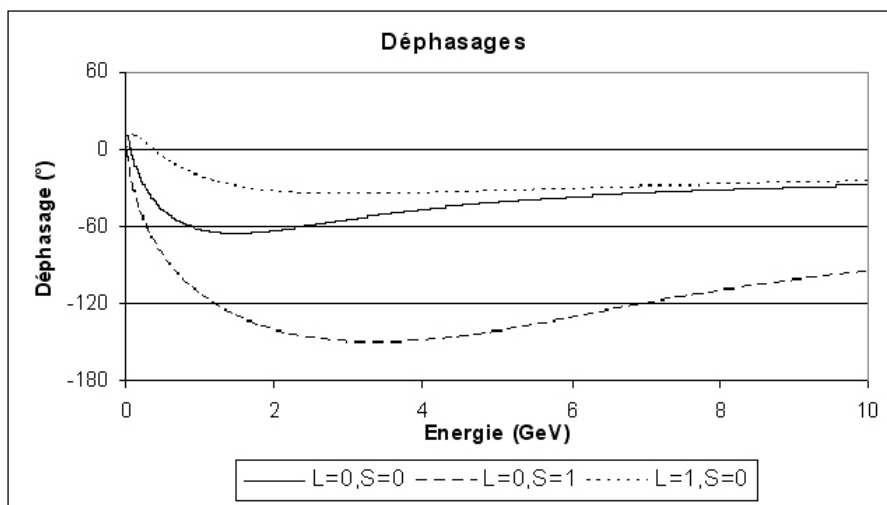


FIG. 5.19 – Déphasages aux hautes énergies en fonction de l'énergie du potentiel de Hiyama pour l'interaction $\Lambda\Lambda$ pour différentes ondes partielles.

Chapitre 6

Etude du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$

6.1 Description générale de l'étude

Nous allons modéliser l'hypernoyau ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ par le système à 3 corps $\alpha\alpha\Lambda$. Nous résoudrons l'équation de Schrödinger par la méthode des coordonnées hypersphériques, en utilisant les méthodes numériques présentées dans les chapitres précédents. Nous effectuerons des comparaisons entre l'hypernoyau ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ et le noyau ${}^9\text{Be}$ (modélisé par un système $\alpha\alpha n$), afin de mettre en évidence les différences entre un neutron et une particule Λ . Nous comparerons également les différences entre le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ et le ${}^8\text{Be}$; ce dernier n'étant pas stable, cela nous permettra de montrer l'effet stabilisateur de l'ajout d'un Λ .

Dans un premier temps, nous analyserons les niveaux d'énergie, et comparerons les résultats donnés par les différents potentiels décrits dans le chapitre précédent. Ensuite, nous étudierons les différences au niveau des fonctions d'onde et du rayon carré moyen. Finalement, nous calculerons différentes grandeurs liées aux opérateurs de transitions électriques. Dans tous les cas, nous nous bornerons à l'étude des états liés de l'hypernoyau, à savoir l'état fondamental et le premier état excité.

6.2 Niveaux d'énergie

Nous avons deux choix possibles pour le potentiel $\alpha\alpha$: le potentiel BFW (voir 5.34) et le potentiel d'Ali-Bodmer (voir 5.36). De même, nous avons deux possibilités pour choisir un potentiel $\alpha\Lambda$: le potentiel SG (voir 5.37) ou le potentiel Isle (voir 5.38). Le choix du zéro des énergies sera le seuil de dissociation en $\alpha + \alpha + \Lambda$.

Le choix de l'interaction $\alpha\alpha$ n'a quasi aucune influence par rapport aux niveaux d'énergie. Dans la plupart des cas, les valeurs des niveaux d'énergie des deux premiers états du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ sont environ 1,5 MeV plus basses que les valeurs expérimentales (le fondamental est à -6,62 MeV, et le premier état excité à -3,54 MeV). Quand nous utilisons le potentiel SG, avec soit le potentiel d'Ali-Bodmer, soit le potentiel BFW avec l'élimination des états interdits par la méthode de la supersymétrie, nous

obtenons des valeurs plus proches de l'expérience. Les similitudes entre ces deux potentiels viennent du fait que le potentiel d'Ali-Bodmer et le potentiel BFW peuvent être considérés comme des potentiels partenaires supersymétriques (voir équation 5.32 et article [25]). Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus, en utilisant des réseaux de Lagrange comprenant 30 points, et un paramètre h fixé à 0,40, pour l'état fondamental (E_0) et le premier état excité (E_1) du ${}^9_\Lambda\text{Be}$. La valeur de K_M est fixée à 26 pour l'état fondamental et à 20 pour le premier état excité. Nous indiquons également la différence d'énergie entre les deux niveaux.

Potentiels, méthode	E_0 (MeV)	E_1 (MeV)	ΔE (MeV)
Ali-Bodmer et Isle	-8,325	-5,409	2,916
Ali-Bodmer et SG	-6,702	-3,964	2,737
BFW et Isle - Méthode supersymétrique	-8,411	-5,387	3,024
BFW et SG - Méthode supersymétrique	-6,917	-4,038	2,878
BFW et Isle - Méthode des projecteurs	-8,716	-5,556	3,161
BFW et SG - Méthode des projecteurs	-8,155	-4,927	3,227
Valeurs expérimentales	-6,62	-3,54	3,08

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que celles trouvées par une méthode de calcul différente dans l'article [30]. Une valeur expérimentale connue avec haute précision est la différence entre ces deux niveaux, qui vaut 3,08 MeV. Dans le tableau ci-dessus, nous voyons que le potentiel de Isle donne de meilleurs résultats que le potentiel SG, même si ce dernier donne des résultats plus proches des valeurs expérimentales. De plus, les différences entre le potentiel BFW avec élimination des états interdits par la méthode supersymétrique et le potentiel d'Ali-Bodmer sont minimales, comme attendu par [25]. Cela se voit plus nettement sur la figure 6.1.

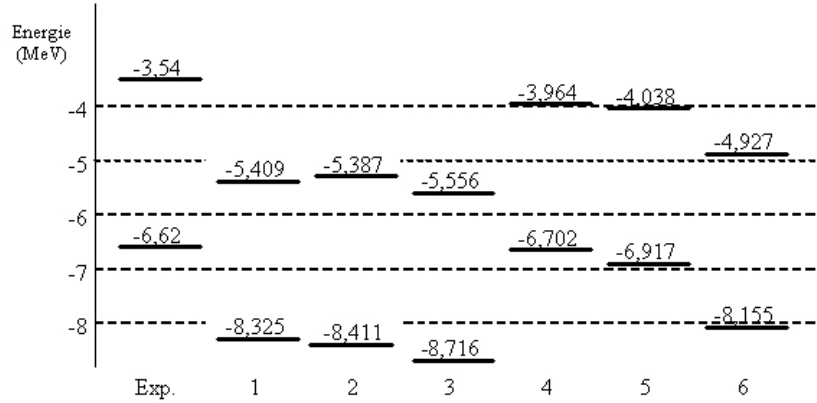


FIG. 6.1 – Niveaux d'énergie des deux premiers états du ${}^9_\Lambda\text{Be}$. 1 - Potentiels d'Ali-Bodmer et Isle ; 2 - Potentiels BFW et Isle - Méthode supersymétrique ; 3 - Potentiels BFW et Isle - Méthode des projecteurs ; 4 - Potentiels d'Ali-Bodmer et SG ; 5 - Potentiels BFW et SG - Méthode supersymétrique ; 6 - Potentiels BFW et SG - Méthode des projecteurs.

La dépendance des résultats en fonction de la valeur de K_M est similaire pour tous les choix de potentiels et de méthodes d'élimination des états interdits. Nous illustrons la convergence dans le cas du potentiel de Isle associé au potentiel d'Ali-Bodmer (voir figure 6.2). Pour chaque choix de potentiels, nous avons des courbes de même forme, mais bien sûr décalées sur l'échelle des énergies. Nous voyons que nos choix de $K_M = 26$ pour l'état fondamental et $K_M = 20$ pour l'état excité sont corrects et qu'il ne faut pas monter plus haut dans les valeurs de K .

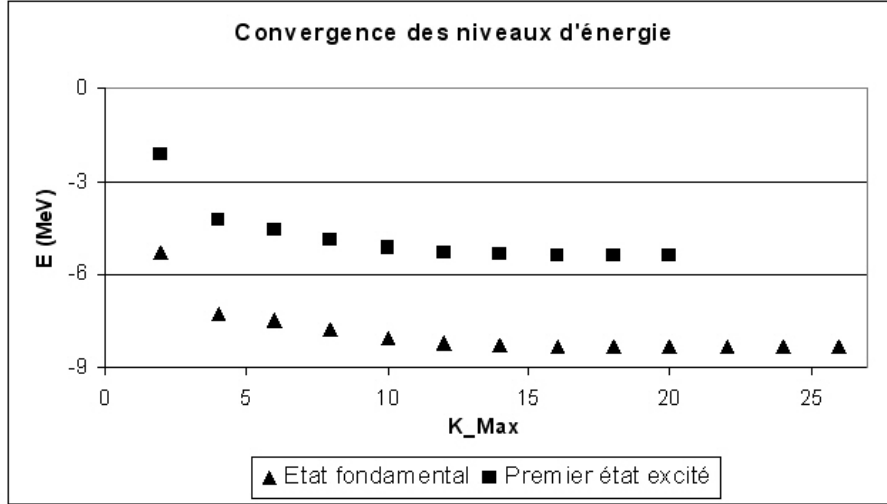


FIG. 6.2 – Niveaux d'énergie des deux premiers états du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ en fonction de K_M , pour des réseaux de Lagrange à 30 points et une valeur de 0,40 pour le paramètre h .

6.3 Fonctions d'onde

6.3.1 Généralités

Dans toute cette section et plus particulièrement dans les figures qui vont suivre, l'axe $r_{\alpha\alpha}$ est la distance (en fm) entre les deux particules α et l'axe $r_{\Lambda\alpha}$ est la distance (en fm) entre le Λ et le centre de masse des deux α . De même, l'axe r_{nc} est la distance (en fm) entre le neutron et le centre de masse des deux α (dans le cas du noyau ${}^9\text{Be}$). Les fonctions d'onde ont été calculées avec $K_M = 26$ pour des calculs concernant le fondamental et $K_M = 20$ pour des calculs concernant l'état excité, avec des réseaux de Lagrange comportant 30 points, et la valeur du paramètre h a été fixée à 0,40. Nous utiliserons ces valeurs dans tout le chapitre.

6.3.2 Potentiel BFW (traité par la méthode supersymétrique) et potentiel d'Ali-Bodmer

Le potentiel BFW associé à la méthode supersymétrique et le potentiel d'Ali-Bodmer donnant des résultats très proches, nous les étudierons simultanément. En

traçant le carré du module de la fonction d'onde radiale dans les axes définis ci-dessus, nous pouvons déduire la probabilité de trouver les différentes particules à une certaine distance les unes des autres. Nous avons multiplié la valeur de cette probabilité par le carré des deux coordonnées afin d'avoir simplement à intégrer sur les deux axes pour avoir la norme de la fonction d'onde.

Nous avons remarqué que le choix de l'interaction $\alpha\Lambda$ n'influaît que très peu sur la fonction d'onde radiale, que l'on choisisse le potentiel SG ou le potentiel Isle. Nous obtenons la forme suivante :

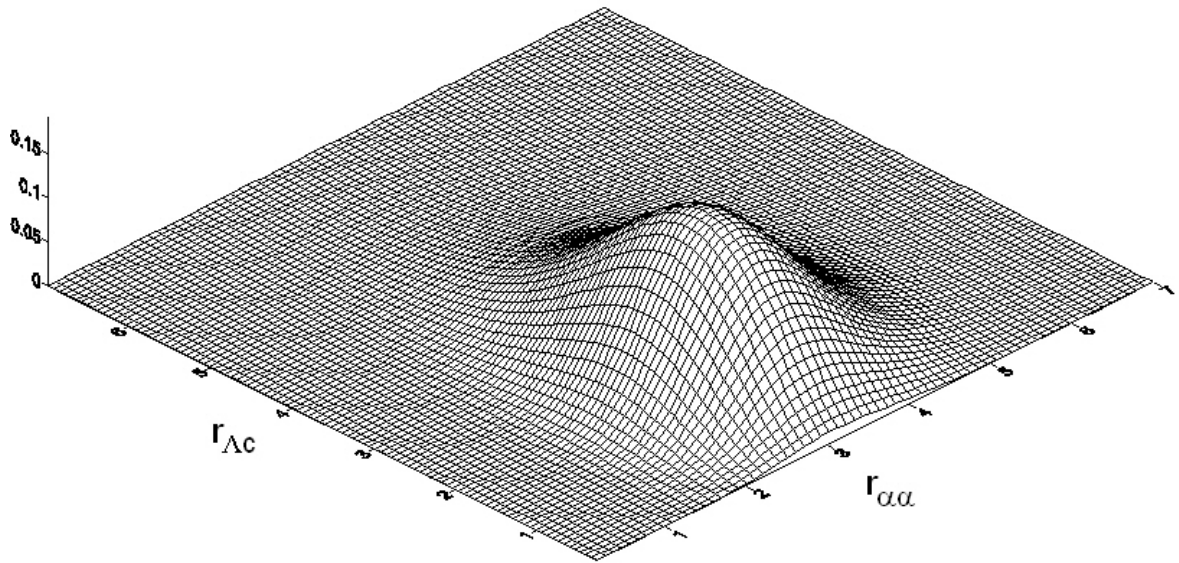


FIG. 6.3 – Carré du module de la fonction d'onde radiale de l'état fondamental du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, avec comme potentiels Isle et BFW. Les distances sont exprimées en fm.

La seule différence se trouve dans la largeur du pic, qui est un peu plus étroit dans le cas du potentiel SG. Le maximum se trouve au même endroit dans les deux cas (voir figure 6.3). Nous ne notons aucune différence que l'on soit dans l'état fondamental ou dans l'état excité (les différences au niveau de la fonction d'onde totale viennent de la partie angulaire, qui n'est pas représentée ici).

Comparons avec la fonction d'onde de l'état fondamental du ${}^9\text{Be}$, en utilisant le potentiel BFW pour l'interaction $\alpha\alpha$ et le potentiel αN décrit dans le chapitre précédent (voir figure 6.4).

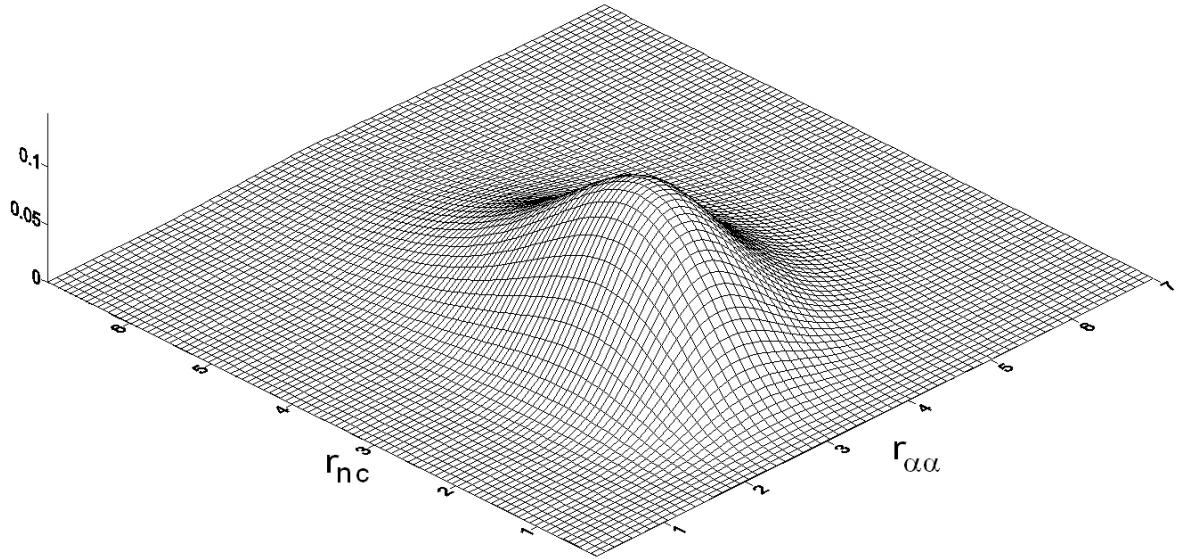


FIG. 6.4 – Carré du module de la fonction d’onde radiale de l’état fondamental du ${}^9\text{Be}$, avec comme potentiels BFW et le potentiel αN décrit dans le chapitre précédent. Les distances sont exprimées en fm.

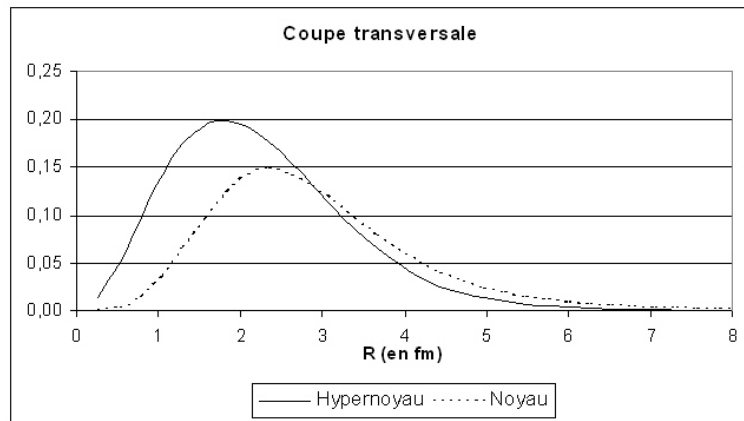


FIG. 6.5 – Coupes des fonctions d’onde radiales à $r_{\alpha\alpha} = 3,18$ fm. L’abscisse correspond à la distance entre la particule seule et le centre de masse des deux α .

Nous voyons que la particule Λ se trouve légèrement plus proche du centre de masse des deux α que le neutron. En effectuant une coupe à $r_{\alpha\alpha} = 3,18$ fm des fonctions d’onde radiales du noyau et de l’hypernoyau, cela se remarque encore plus nettement. Dans le cas du potentiel d’Ali-Bodmer pour l’interaction $\alpha\alpha$, du potentiel Isle pour

l'interaction $\alpha\Lambda$ et du potentiel habituel pour l'interaction αN , nous obtenons la figure 6.5.

Nous en concluons que le système $\alpha\Lambda$ est un peu plus lié que le système αN . Cela rejoint les conclusions de l'article [30], qui nous dit que le neutron est beaucoup plus éloigné du centre de masse que le Λ . Rappelons néanmoins que nous étudions deux états quantiques différents.

Afin d'avoir une vue d'ensemble du système global, il faudra étudier le rayon carré moyen, prenant en compte l'éloignement moyen des trois particules entre elles, et pas seulement du baryon isolé par rapport au centre de masse des deux α . C'est ce que nous ferons dans l'une des sections suivantes.

6.3.3 Potentiel BFW (traité par la méthode des projecteurs)

Effectuons le même travail que précédemment, mais en traitant les états interdits du potentiel BFW par la méthode des projecteurs. Le carré du module de la fonction d'onde a la forme de la figure 6.6.

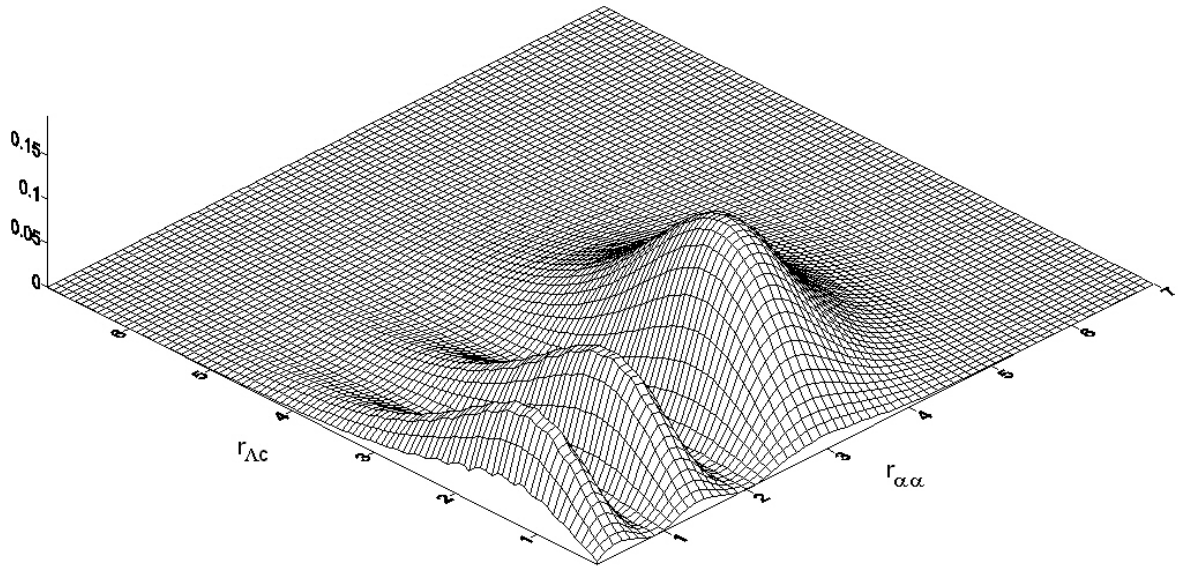


FIG. 6.6 – Carré du module de la fonction d'onde radiale de l'état fondamental du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, avec comme potentiels BFW et le potentiel SG. Les distances sont exprimées en fm.

Le cas du potentiel de Isle présente des pics un peu plus étroits que pour le cas du potentiel SG. Les différents noeuds s'expliquent par le fait que l'état fondamental est le troisième état lié du potentiel, vu que nous avons deux états interdits. Nous avons effectivement les deux noeuds attendus (voir figure 6.6). Pour l'état excité, nous devons donc observer un noeud, vu qu'il n'y a qu'un seul état interdit. C'est ce que l'on observe à la figure 6.7.

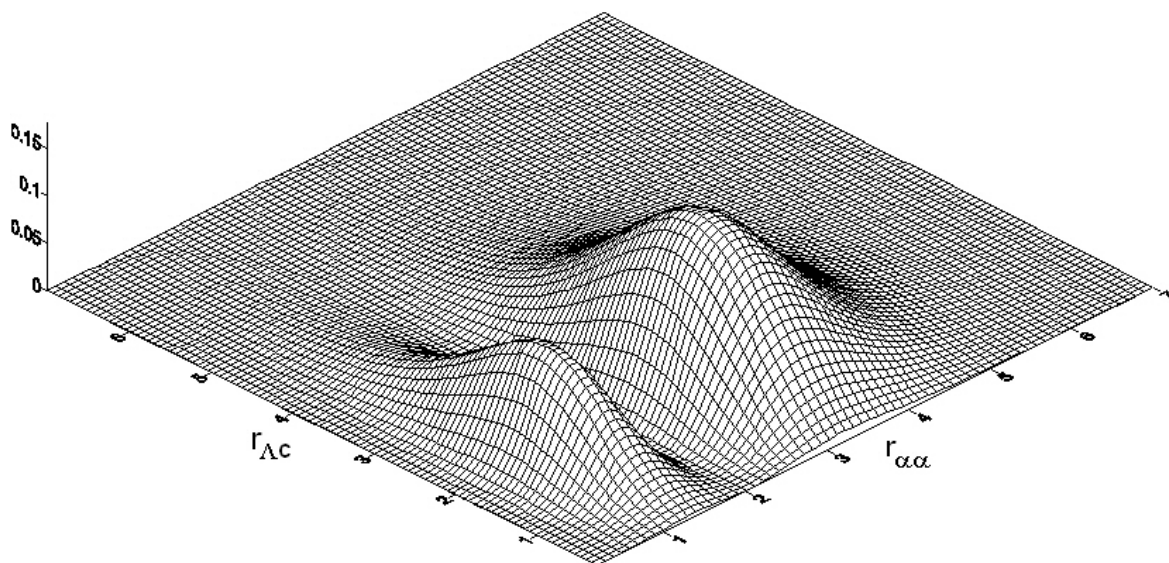


FIG. 6.7 – Carré du module de la fonction d'onde radiale du premier état excité du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, avec comme potentiels BFW et le potentiel Isle. Les distances sont exprimées en fm.

De tels noeuds ne sont pas observés dans le cas de la méthode supersymétrique, car le potentiel BFW a été remplacé pour son partenaire supersymétrique, qui ne présente aucun état interdit.

En effectuant une coupe transversale en fixant la distance Λ -centre de masse des deux α , nous devons obtenir une courbe similaire à l'état fondamental du ${}^8\text{Be}$ (voir figure 6.8 pour l'état fondamental; l'état excité présentant les mêmes similitudes mais avec un noeud au lieu de deux). On voit que les deux fonctions d'ondes sont quasi identiques à courte distance. Rappelons cependant que l'onde libre continue à osciller alors que l'hypernoyau est lié.

Cela confirme l'idée que le Λ a un effet stabilisateur sur le ${}^8\text{Be}$, vu que ce noyau n'est pas lié. L'introduction du Λ permet d'avoir non seulement un état fondamental

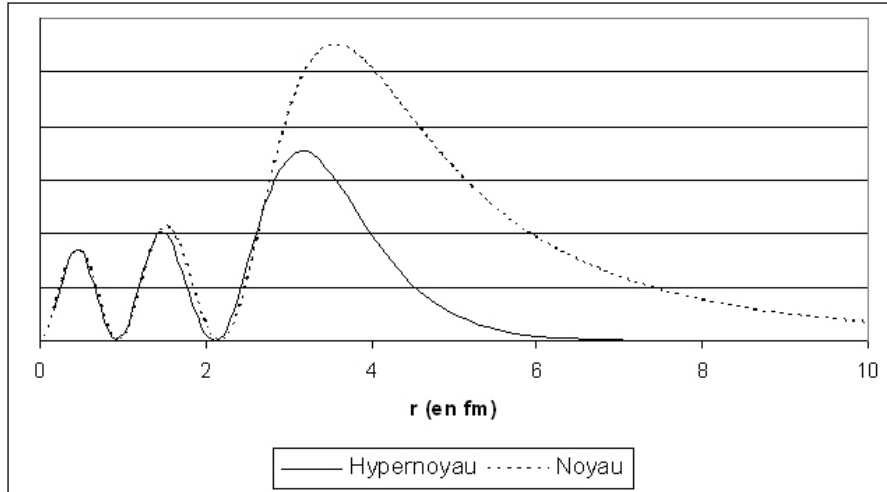


FIG. 6.8 – Coupe de la fonction d’onde radiale à $r_{\Lambda c} = 2,09$ fm. L’abscisse correspond à la distance entre les deux particules α . La fonction d’onde libre a été normalisée afin que les premiers pics correspondent.

lié, mais aussi un état excité. Cela cause également un effet de contraction des deux particules α .

6.4 Rayon carré moyen

En calculant le rayon carré moyen (voir équation 3.12), nous pouvons observer que le Λ a un léger effet contractant sur l’hypernoyau, par rapport au noyau ${}^9\text{Be}$.

Dans le cas du potentiel BFW, la racine carrée du rayon carré moyen vaut environ 1,90 fm pour le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, contre 1,97 fm pour le ${}^9\text{Be}$.

Dans le cas du potentiel d’Ali-Bodmer, nous obtenons des valeurs de 1,98 fm pour le potentiel SG, et de 1,95 fm pour le potentiel Isle. Par contre, nous avons une valeur de 2,02 fm pour le noyau, avec l’interaction αN habituelle.

6.5 Transitions électriques

6.5.1 Généralités

Dans cette section, nous allons calculer les éléments de matrice réduits liés à la transition $E2$. Les règles de sélection des transitions électriques nous indiquent qu’entre le premier état excité et l’état fondamental du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, nous avons une transition $E2$. En effet, si l’indice f désigne l’état final et l’indice i l’état initial, il faut que :

$$|J_f - J_i| \leq \lambda \leq J_i + J_f \quad (6.1)$$

avec λ étant l'ordre de la transition et

$$\pi_f \pi_i = (-)^\lambda \quad (6.2)$$

Ces relations sont bien vérifiées pour $\lambda = 2$, $J_i^{\pi_i} = 3/2^+$ et $J_f^{\pi_f} = 1/2^+$ pour l'hypernoyau. De même, nous avons une transition $E2$ entre le premier état excité $J_i^{\pi_i} = 5/2^-$ l'état fondamental $J_f^{\pi_f} = 3/2^-$ du noyau ${}^9\text{Be}$.

A partir des éléments de matrice réduits, nous allons pouvoir calculer le moment quadrupolaire électrique et la probabilité de transition réduite. Ces deux grandeurs sont définies par

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} (JJ20|JJ) \langle J^\pi || E2 || J^\pi \rangle \quad (6.3)$$

et

$$B(E2) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} |\langle J_f^{\pi_f} || E2 || J_i^{\pi_i} \rangle|^2 \quad (6.4)$$

Nous commencerons par analyser les résultats pour le noyau ${}^9\text{Be}$, et ensuite nous analyserons l'hypernoyau en tenant compte des conclusions venant de l'étude du noyau.

6.5.2 Cas du ${}^9\text{Be}$

Nous allons calculer les deux éléments de matrice réduits suivants : $\langle 3/2^- || E2 || 3/2^- \rangle$ et $\langle 3/2^- || E2 || 5/2^- \rangle$. Le premier élément de matrice servira à calculer le moment quadrupolaire électrique de l'état fondamental et le deuxième la probabilité de transition réduite du premier état excité vers l'état fondamental. Pour les différents potentiels, nous obtenons les résultats suivants :

	Q (en e fm ²)	$B(E2)$ (en e ² fm ⁴)
Potentiel d'Ali-Bodmer	4,74	16,98
Potentiel BFW, méthode supersymétrique	4,47	18,94
Valeurs expérimentales (voir [31])	5,86 ± 0,06	27,08 ± 2

Le modèle donne des résultats corrects au niveau des ordres de grandeur, mais les valeurs expérimentales sont sous-estimées. La valeur du moment quadrupolaire nous confirme la forme allongée du noyau.

6.5.3 Cas du ${}^9_\Lambda\text{Be}$

Le moment quadrupolaire électrique de l'état fondamental est nul, vu que nous avons affaire à un état $L = 0$ ($J^\pi = 1/2^+$), qui est donc à symétrie sphérique. Nous retrouvons également ce résultat par notre méthode de calcul.

Nous allons calculer les éléments de matrice réduits $\langle 3/2^+ || E2 || 3/2^+ \rangle$, $\langle 1/2^+ || E2 || 3/2^+ \rangle$ et $\langle 1/2^+ || E2 || 5/2^+ \rangle$, car ils nous permettront de calculer le moment quadrupolaire électrique du premier état excité (Q), la probabilité de transition réduite entre l'état $3/2^+$ et l'état fondamental (B_1), et la probabilité de transition réduite entre l'état $5/2^+$ et l'état fondamental (B_2). Nous calculerons la moyenne pondérée de ces 2 valeurs (B_m) afin de la comparer aux données expérimentales connues.

Les deux tables ci-dessous reprennent les résultats obtenus :

Potentiels, méthode	Q (e fm ²)
Ali-Bodmer et Isle	-5,06
Ali-Bodmer et SG	-5,33
BFW et Isle - Méthode supersymétrique	-5,08
BFW et SG - Méthode supersymétrique	-4,92
BFW et Isle - Méthode des projecteurs	-4,54
BFW et SG - Méthode des projecteurs	-4,17

Potentiels, méthode	B_1 (e ² fm ⁴)	B_2 (e ² fm ⁴)	B_m (e ² fm ⁴)
Ali-Bodmer et Isle	13,16	13,06	13,1
Ali-Bodmer et SG	14,36	12,87	13,47
BFW et Isle - Méthode supersymétrique	12,71	12,57	12,62
BFW et SG - Méthode supersymétrique	12,13	12,04	12,08
BFW et Isle - Méthode des projecteurs	9,84	9,76	9,79
BFW et SG - Méthode des projecteurs	8,11	8,06	8,08

La première différence avec le noyau ${}^9\text{Be}$ est la forme de l'hypernoyau. En effet, nous avons ici un moment quadrupolaire négatif, ce qui signifie que l'hypernoyau a une forme aplatie. Les valeurs numériques que nous obtenons sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par une autre méthode de calcul dans l'article [30] (≈ -5 e fm²).

Les valeurs obtenues pour la probabilité de transition réduite en utilisant la méthode des projecteurs pour l'élimination des états interdits du potentiel BFW sont inférieures à celles obtenues par les autres choix de potentiels et méthodes. Nous disposons d'une valeur expérimentale pour B_m , qui vaut $5,7_{-2,0}^{+2,1}$ e² fm⁴ (voir [32]). Il s'agit d'une moyenne pondérée sur les états initiaux $5/2^+$ et $3/2^+$. Nous remarquons que la méthode des projecteurs donne à nouveau les meilleurs résultats. Les autres résultats sont néanmoins très proches de la valeur de $11,3$ e² fm⁴ prédite par Motoba et al. dans l'article [33].

Chapitre 7

Etude du ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$

7.1 Introduction

Nous allons modéliser l'hypernoyau ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ par le système à 3 corps $\alpha\Lambda\Lambda$. Nous résoudrons l'équation de Schrödinger par la méthode des coordonnées hypersphériques, en utilisant les méthodes numériques présentées dans les chapitres précédents.

Nous allons commencer par calculer le niveau d'énergie obtenu pour l'état fondamental du ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ et le comparer à la valeur expérimentale de -7,25 MeV (voir [8]). Nous utiliserons le potentiel Isle pour décrire l'interaction $\Lambda\alpha$ et nous comparerons les deux potentiels $\Lambda\Lambda$ définis par les équations 5.39 et 5.40. Nous comparerons également nos valeurs à celles obtenues par Khan et Das dans l'article [34], qui calculent cette même énergie de liaison, également par la méthode des coordonnées hypersphériques, mais en utilisant d'autres potentiels et valeurs des paramètres de la méthode. Ensuite, nous étudierons et comparerons les fonctions d'onde obtenues en choisissant l'une ou l'autre des deux interactions $\Lambda\Lambda$. Finalement, nous analyserons le rayon carré moyen.

7.2 Niveaux d'énergie

Le zéro des énergies est fixé au seuil de dissociation du système en deux particules Λ et une particule α . Nous obtenons comme résultats les valeurs du tableau ci-dessous, pour un K_M fixé à 26. Les paramètres du réseau de Lagrange sont les mêmes que lors de l'étude du ${}_{\Lambda}^9\text{Be}$: le nombre de points est fixé à 30 et le paramètre h est de 0,40.

Potentiels	Energie de liaison (MeV)
SB et Isle	-7,604
Hiyama et Isle	-7,112

Nous avons des résultats peu éloignés de la valeur expérimentale. Ils sont assez différents de ceux de l'article [34], qui sont de l'ordre de 10 MeV. Cela est dû au fait qu'au moment de la parution de cet article, les valeurs expérimentales de l'énergie

de liaison du ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$ étaient erronées et valaient un peu plus de 10 MeV. En effet, l'événement Nagara (voir [8]) n'avait pas encore été observé en 2000. Les résultats de Khan et Das sont donc inférieurs à la valeur expérimentale actuelle, mais reproduisent très bien la valeur connue en 2000.

Les potentiels de Hiyama et Isle semblent donner des résultats plus proches de la valeur expérimentale. Dans l'étude du ${}_{\Lambda}{}^9\text{Be}$, nous avons vu que le potentiel de Isle donnait des niveaux d'énergie plus liés que les niveaux expérimentaux (les potentiels $\alpha\alpha$ utilisés sont bien connus théoriquement et ne jouent pas pour expliquer l'énergie trop basse). En tenant compte du surliage dû au potentiel de Isle, le potentiel SB pourrait être meilleur que le potentiel de Hiyama.

Sur la figure 7.1, nous voyons que la valeur 26 pour K_M suffit amplement pour avoir convergence :

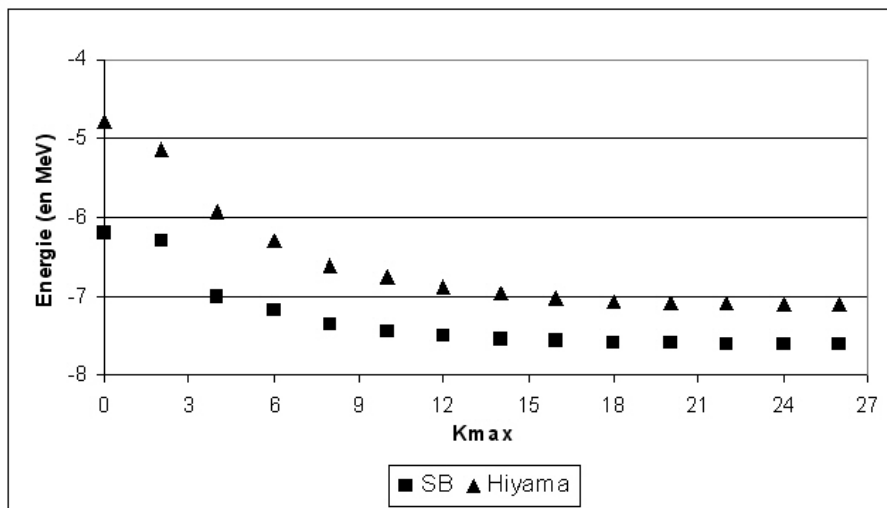


FIG. 7.1 – Niveaux d'énergie des deux premiers états du ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$ en fonction de K_M , pour des réseaux de Lagrange à 30 points et une valeur de 0,40 pour le paramètre h .

7.3 Fonctions d'onde

Les fonctions d'onde obtenues pour l'état fondamental de l'hypernoyau ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$ sont similaires. Quel que soit le choix du potentiel, la densité de probabilité présente la forme de la figure 7.2. L'axe $r_{\Lambda\Lambda}$ correspond à la distance entre les deux particules Λ et l'axe $r_{\alpha c}$ à la distance entre la particule α et le centre de masse des deux particules Λ . Les distances sont exprimées en fm.

Le maximum se trouve approximativement au même endroit que celui calculé par Khan et Das (article [34]), mais dans notre travail, nous avons une forme moins

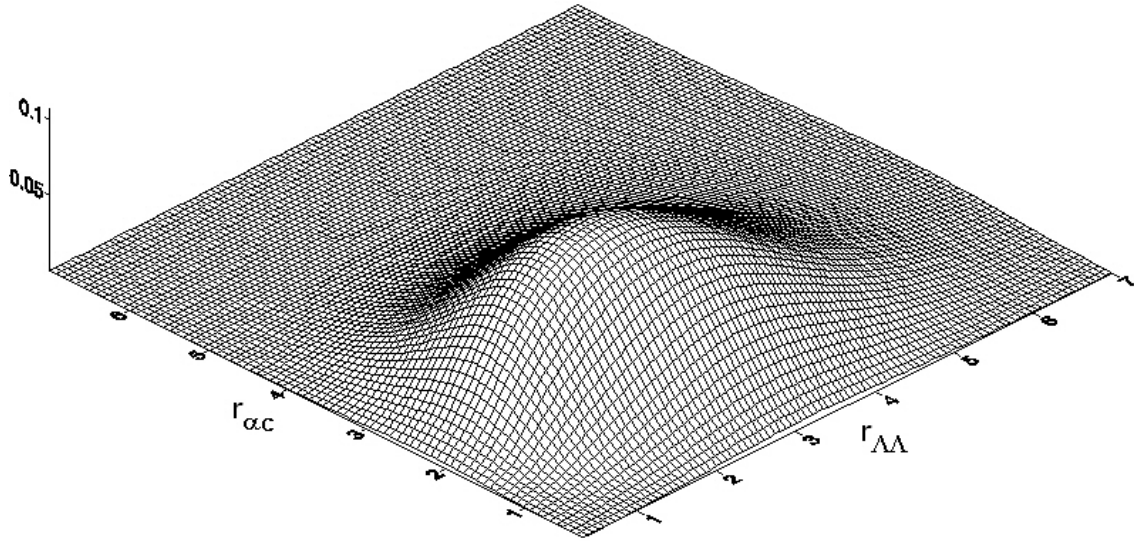


FIG. 7.2 – Carré du module de la fonction d’onde radiale de l’état fondamental du ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$, pour les potentiels SB et Isle. Les distances sont exprimées en fm.

piquée. Cela s’explique simplement par le fait que plus l’énergie de liaison est basse, plus la densité de probabilité sera piquée. Or Khan et Das ont trouvé des énergies d’environ 3 MeV inférieures aux nôtres.

7.4 Rayon moyen

Notre méthode de calcul nous donne les valeurs suivantes pour le rayon moyen :

Potentiels	Rayon moyen (fm)
SB et Isle	1,76
Hiyama et Isle	1,81

Ces valeurs sont du même ordre que celles calculées par Kahn et Das (voir [34]), qui trouvent environ 1,60-1,70 fm dans tous leurs choix de potentiels. Cela vient bien sûr de leurs densités de probabilité plus piquées que les nôtres.

Chapitre 8

Conclusion

Nous avons modélisé deux hypernoyaux différents, le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ et le ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, par des systèmes à trois corps, respectivement un système $\alpha\alpha\Lambda$ et un système $\Lambda\Lambda\alpha$. La méthode des coordonnées hypersphériques a été utilisée afin de résoudre l'équation de Schrödinger et de calculer différentes grandeurs, comme les niveaux d'énergie des états liés, les rayons carrés moyens, et l'allure des densités de probabilité de présence de ces deux hypernoyaux. Dans le cas du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, nous avons également étudié les transitions électriques entre les premiers états excités et l'état fondamental, ainsi que le moment quadrupolaire. Nous avons comparé nos résultats à d'autres modèles théoriques existants, et bien sûr aux valeurs expérimentales lorsqu'elles étaient disponibles.

Nous avons vu que la méthode des coordonnées hypersphériques donnait de très bons résultats pour des valeurs de K_M pas trop élevées. Pour le ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, nous avons utilisé $K_M = 26$ pour l'état fondamental, ce qui correspond à une base de 98 fonctions, et $K_M = 20$ pour le premier état excité, ce qui correspond à une base de 110 fonctions. Pour le ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, nous avons choisi $K_M = 26$, ce qui nous donnait 105 fonctions de base. Nous voyons que malgré des valeurs de K_M comprises entre 20 et 30, le nombre de fonctions de base est tout de même important, ce qui influe grandement sur le temps de calcul et la mémoire utilisée.

Dans le cas du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, les deux premiers niveaux d'énergie calculés présentent une petite différence avec l'expérience, mais la différence d'énergie entre ces deux niveaux, bien connue expérimentalement, est bien reproduite dans la plupart des cas. Parmi nos différents potentiels, construits sur base de problèmes différents du nôtre, cette valeur est mieux reproduite par le potentiel de Isle que le potentiel SG (pour l'interaction $\alpha\Lambda$), bien qu'il sous-estime les niveaux d'énergie. La comparaison des fonctions d'onde et des rayons carrés moyens entre l'hypernoyau et le noyau ${}^9\text{Be}$ nous indique que le Λ a un léger effet de contraction du système par rapport au neutron. Son rôle stabilisateur a également été mis en évidence, vu qu'il permet de transformer le système $\alpha\alpha$ en un système lié. Le moment quadrupolaire de l'état fondamental du ${}^9\text{Be}$ est reproduit avec un bon ordre de grandeur, mais il sous-estime les valeurs expérimentales. Le premier état excité du ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ est également bien reproduit, comparé

à d'autres modèles théoriques. D'après les résultats sur le noyau ${}^9\text{Be}$, on peut penser que ces résultats sous-estiment la valeur expérimentale exacte. La probabilité de transition réduite du premier état excité vers l'état fondamental semble surestimer la valeur expérimentale, mais cette dernière présente de grandes incertitudes.

Nous avons également effectué des calculs pour le ${}_{\Lambda\Lambda}{}^6\text{He}$. Les niveaux d'énergie que nous trouvons pour l'état fondamental encadrent relativement bien la valeur expérimentale, et nos rayons moyens sont comparables aux résultats théoriques d'autres groupes.

Notre étude présente toutefois des limites, qui sont des pistes à explorer pour améliorer le modèle. Nous avons utilisé uniquement des potentiels locaux, mais il existe également des potentiels non locaux. Si l'on désire construire une interaction $\alpha\Lambda$ à partir des interactions ΛN connues, nous obtiendrons un potentiel non local (exemple : le potentiel de Hiyama pour l'interaction $\alpha\Lambda$). L'intérêt de ces potentiels est qu'ils sont plus proches de la physique du problème. Or le programme utilisé ne permet pas de gérer de tels potentiels. Ensuite, nous avons uniquement étudié des états liés, car le programme traite un état libre comme un état lié d'énergie nulle, où les différents corps sont séparés par des distances infinies. Cependant, il existe des programmes utilisant la méthode des coordonnées hypersphériques adaptés aux résonances. Il pourrait être intéressant de calculer ces résonances, en attendant les données expérimentales (quasi) inexistantes à l'heure actuelle.

Annexe A

Les symétries de type $SU(N)$

A.1 La symétrie d'isospin - le groupe $SU(2)$

Les quarks u et le d ont des comportements et des propriétés similaires vis-à-vis de l'interaction forte. Nous avons donc tendance à les assimiler à 2 états de charge d'une même particule. Un u pourra être transformé en d et inversement sans que cela ne change quoi que ce soit (au premier ordre) au niveau de l'hamiltonien, de la masse ou de l'énergie pour l'interaction forte.

Cette symétrie se modélise en considérant une invariance du système (par rapport à l'interaction forte) par une iso-rotation dans l'iso-espace. Cette opération est représentée par des matrices complexes, unitaires et unimodulaires de dimension 2 (les matrices de $SU(2)$). Ces objets mathématiques forment un groupe.

La loi de transformation d'un doublet de quarks $u - d$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où U est une matrice de $SU(2)$. Ainsi, toute transformation par rapport à l'isospin peut se réécrire comme combinaison linéaire des états de départ. On retrouve une similarité avec les rotations dans l'espace physique au niveau du formalisme. U peut d'ailleurs s'écrire sous la forme :

$$U = e^{i \sum_{i=1}^3 \theta_i T_i} \quad (\text{A.2})$$

où les T_i sont les projections de l'opérateur d'isospin sur les 3 axes de l'iso-espace. Les matrices T_i sont appelées générateurs du groupe $SU(2)$. Nous retrouvons ici une écriture totalement semblable à celle d'une rotation de l'espace physique. Remarquons que les T_i respectent l'algèbre de Lie caractéristique de $SU(2)$ et de ses représentations :

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k \quad (\text{A.3})$$

où ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique pour la permutation d'indices. Cette algèbre est respectée par toutes les représentations de dimension N de $SU(2)$,

et en particulier par $SO(3)$ qui est le groupe des matrices de rotation de l'espace physique. Seules les matrices T_i changent avec la dimension de la représentation.

A.2 La symétrie $SU(3)$

Considérons à présent le triplet de quarks $u - d - s$. Nous supposons l'existence d'une symétrie telle que l'interaction forte est invariante pour l'échange de 2 d'entre eux. Evidemment, le quark s brise cette symétrie en raison de sa masse (plus lourde) que celles des deux autres quarks, mais nous allons nous contenter d'une symétrie approchée au premier ordre.

Nous allons rechercher un groupe de matrice U tel que toute transformation du triplet de quarks peut s'écrire comme une combinaison linéaire des 3 états de base et conserve l'interaction forte. Le groupe des matrices complexes, unimodulaires et unitaires de dimension 3 satisfait à cela. Il s'agit du groupe $SU(3)$. Similairement à $SU(2)$, nous pouvons écrire une transformation $SU(3)$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

U peut s'écrire sous une forme exponentielle :

$$U = e^{i \sum_{a=1}^8 \theta_a T_a} \quad (\text{A.5})$$

où les T_a sont les 8 générateurs de $SU(3)$. Ils respectent une algèbre de Lie propre à $SU(3)$ plus compliquée que celle de $SU(2)$. Cette algèbre sera respectée par toutes les représentations de dimension N de $SU(3)$.

A.3 Les symétries $SU(N)$

Nous pouvons définir des symétries à N dimensions entre N particules physiques. En raison des différences de masse, ces symétries seront plus ou moins approchées ou non. Les transformations de ces N particules pourront s'écrire sous la forme d'une matrice U complexe, unimodulaire et unitaire appartenant donc à $SU(N)$. U pourra se réécrire sous une forme exponentielle faisant intervenir les $N^2 - 1$ générateurs du groupe, qui respecteront une algèbre de Lie de plus en plus compliquée au fur et à mesure que N augmente.

Par exemple, en introduisant le quark charmé c , nous allons supposer une symétrie $SU(4)$ entre les 4 quarks. Cela nous permet de prédire certaines symétries entre différents groupes de hadrons charmés. Celles-ci restent néanmoins très approchées en raison des différences de masse entre les 4 quarks.

De plus amples informations se trouvent dans les livres [1] et [3].

Annexe B

Les polynômes de Jacobi, de Laguerre et de Legendre

B.1 Les polynômes de Jacobi

Toutes les relations ci-dessous, ainsi que d'autres, se trouvent dans le livre [17]. Nous détaillerons ici les plus importantes d'entre elles, ainsi que celles dont nous allons nous servir pour ce travail.

Les polynômes de Jacobi sont des polynômes $P_n^{a,b}(x)$, de degré n et dépendant de 2 paramètres a et b . n est donc un entier positif ou nul. a et b sont des réels strictement supérieurs à -1.

Ces polynômes vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^a P_n^{a,b}(x) P_{n'}^{a,b}(x) dx = \frac{2^{a+b+1} \Gamma(n+a+1) \Gamma(n+b+1)}{(2n+a+b+1)n! \Gamma(n+a+b+1)} \delta_{nn'} \quad (\text{B.1})$$

Ils sont solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' + (b-a - (a+b+2)x)y' + n(n+a+b+1)y &= 0 \\ \text{avec } y = P_n^{a,b}(x) & \\ (1-x^2)y'' + (a-b - (a+b-2)x)y' + (n+1)(n+a+b)y &= 0 \\ \text{avec } y = (1-x)^a (1+x)^b P_n^{a,b}(x) & \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ils satisfont un grand nombre de relations de récurrence, permettant entre autre d'expliciter un polynôme de Jacobi en fonction de polynômes de degrés ou paramètres

différents. Pour a et b fixés, nous avons

$$\left(n + \frac{a+b}{2} + 1\right) (1-x)P_n^{a+1,b}(x) = (n+a+1)P_n^{a,b}(x) - (n+1)P_{n+1}^{a,b}(x) \quad (\text{B.3})$$

$$(2n+a+b)P_n^{a-1,b}(x) = (n+a+b)P_n^{a,b}(x) - (n+b)P_{n-1}^{a,b}(x) \quad (\text{B.4})$$

$$\left(n + \frac{a+b}{2} + 1\right) (1+x)P_n^{a,b+1}(x) = (n+b+1)P_n^{a,b}(x) + (n+1)P_{n+1}^{a,b}(x) \quad (\text{B.5})$$

$$(2n+a+b)P_n^{a,b-1}(x) = (n+a+b)P_n^{a,b}(x) + (n+a)P_{n-1}^{a,b}(x) \quad (\text{B.6})$$

Deux relations utiles sont la relation de Rodrigues

$$P_n^{a,b}(x) = \frac{(-)^n}{2^n n! (1-x)^a (1+x)^b} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^a (1+x)^b (1-x^2)^n] \quad (\text{B.7})$$

et la relation suivante, permettant de calculer la valeur du polynôme de degré n et de paramètres a et b au point x

$$P_n^{a,b}(x) = \frac{(n+a)!}{n!a!} a_0(x) \text{ avec } \begin{cases} a_{m-1}(x) &= 1 - \frac{(n-m+1)(a+b+n+m)}{2m(a+m)}(1-x)a_m(x) \\ a_n(x) &= 1 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Les polynômes de degrés 0 et 1 sont donnés par

$$\begin{aligned} P_0^{a,b}(x) &= 1 \\ P_1^{a,b}(x) &= \frac{1}{2} [2(a+1) + (a+b+2)(x-1)] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Les polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi. En effet, le polynôme de Legendre de degré n correspond au polynôme de Jacobi $P_n^{0,0}$. Il se note $P_n(x)$ avec $n \geq 0$. Nous pouvons donc adapter toutes les relations de la section précédente. Ces polynômes vérifient donc la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_{n'}(x)dx = \frac{2\delta_{nn'}}{2n+1} \quad (\text{B.10})$$

et sont solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y &= 0 & \text{avec } y &= P_n(x) \\ y'' + \left(\frac{n(n+1)}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x^2)^2}\right)y &= 0 & \text{avec } y &= \sqrt{1-x^2}P_n(x) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Ils obéissent à la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (\text{B.12})$$

La relation de Rodrigues est

$$P_n(x) = \frac{(-)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] \quad (\text{B.13})$$

Une relation permettant de calculer la valeur du polynôme de Legendre au point x est

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \frac{(-)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} a_0(x) \text{ avec } \begin{cases} a_{m-1}(x) = 1 - \frac{(n-m+1)(2n+2m-1)}{m(2m-1)} x^2 a_m(x) \\ a_n(x) = 1 \end{cases} \\ P_{2n+1}(x) &= \frac{(-)^n (2n+1)!}{4^n n! (n+1)!} a_0(x) \text{ avec } \begin{cases} a_{m-1}(x) = 1 - \frac{(n-m+1)(2n+2m+1)}{m(2m+1)} x^2 a_m(x) \\ a_n(x) = x \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

B.3 Les polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont des polynômes $L_n(x)$ de degré n avec $n \geq 0$ qui vérifient la relation d'orthonormalité

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_{n'}(x) dx = \delta_{nn'} \quad (\text{B.16})$$

qui sont solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} xy'' + (1-x)y' + ny &= 0 & \text{avec } y = L_n(x) \\ xy'' + (1+x)y' + (n+1)y &= 0 & \text{avec } y = e^{-x} L_n(x) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

et qui obéissent à la relation de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (\text{B.18})$$

La relation de Rodrigues est

$$L_n(x) = \frac{1}{n! e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n] \quad (\text{B.19})$$

La valeur du polynôme de Laguerre de degré n en x est donnée par la relation

$$L_n(x) = a_0(x) \text{ avec } \begin{cases} a_{m-1}(x) = 1 - \frac{n-m+1}{m^2} x a_m(x) \\ a_n(x) = 1 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned}L_0(x) &= 1 \\L_1(x) &= 1 - x \\L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2}\end{aligned}\tag{B.21}$$

Annexe C

Orthogonalité des harmoniques hypersphériques

C.1 Harmoniques hypersphériques

Nous allons démontrer la relation 3.31

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \delta_{KK'} \quad (\text{C.1})$$

Nous pouvons séparer l'intégrale quintuple en une intégrale sur α , une intégrale double sur Ω_x et une autre intégrale double sur Ω_y . Les deux intégrales doubles sont aisément calculables, car elles expriment l'orthonormalité des harmoniques sphériques (voir [15]) :

$$\int Y_l^{m*}(\Omega) Y_{l'}^{m'}(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{C.2})$$

En développant, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^{l_x + l'_x + 2} (\sin \alpha)^{l_y + l'_y + 2} P_n^{l_y + \frac{1}{2}, l_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) P_{n'}^{l'_y + \frac{1}{2}, l'_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) d\alpha \\ &\times \mathcal{N}_K^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K'}^{l'_x l'_y} \int_{\Omega_x} Y_{l_x}^{m_x^*}(\Omega) Y_{l'_x}^{m'_x}(\Omega) d\Omega \int_{\Omega_y} Y_{l_y}^{m_y^*}(\Omega) Y_{l'_y}^{m'_y}(\Omega) d\Omega \\ &= \mathcal{N}_K^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K'}^{l'_x l'_y} \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^{2l_x + 2} (\sin \alpha)^{2l_y + 2} P_n^{l_y + \frac{1}{2}, l_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) P_{n'}^{l'_y + \frac{1}{2}, l'_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) d\alpha \\ &\times \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Posons $x = \cos 2\alpha$, $a = l_y + 1/2$ et $b = l_x + 1/2$. En utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi B.1, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 \\
&= \mathcal{N}_K^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K'}^{l'_x l'_y} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \\
&\times \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1/2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1/2} P_n^{a,b}(x) P_{n'}^{a,b}(x) \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\mathcal{N}_K^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K'}^{l'_x l'_y}}{2^{a+b+2}} \delta_{nn'} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \frac{2^{a+b+1} \Gamma(n+a+1) \Gamma(n+b+1)}{(2n+a+b+1)n! \Gamma(n+a+b+1)}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

De par la définition 3.27 de n , $\delta_{nn'} = \delta_{KK'}$, et d'après la définition des facteurs de normalisation (voir également l'équation 3.27), on a donc

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{KK'} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{m_x m'_x} \delta_{m_y m'_y} \tag{C.5}$$

C.2 Harmoniques hypersphériques composées

Démontrons la relation 3.33 :

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{LL'} \delta_{M_L M'_L} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{KK'} \tag{C.6}$$

Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 &= \sum_{m_x m_y m'_x m'_y} (l_x l_y m_x m_y | LM_L)(l'_x l'_y m'_x m'_y | L'M'_L) \\
&\times \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_K^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5
\end{aligned} \tag{C.7}$$

La dernière intégrale se calcule facilement par C.1, et rappelons la relation d'unitarité des coefficients de Clebsch-Gordan (voir [15]) :

$$\sum_{m_x m_y} (l_x l_y m_x m_y | LM_L)(l_x l_y m_x m_y | L'M'_L) = \delta_{LL'} \delta_{M_L M'_L} \tag{C.8}$$

Nous obtenons finalement

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y m'_x m'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{LL'} \delta_{M_L M'_L} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} \delta_{KK'} \tag{C.9}$$

Ce qui démontre l'orthogonalité des $\mathcal{Y}_{KLM_L}^{l_x l_y m_x m_y^*}(\Omega_5)$

C.3 Harmoniques hypersphériques composées tenant compte du spin

Démontrons la relation 3.36 :

$$\int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J'M'}(\Omega_5) d\Omega_5 = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{KK'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{C.10})$$

En utilisant la définition 3.35, la relation d'unitarité des coefficients de Clebsch-Gordan ci-dessus (équation C.8), la relation d'orthogonalité C.6, et d'orthogonalité des spineurs, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{\gamma K}^{JM*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{\gamma' K'}^{J'M'}(\Omega_5) d\Omega_5 &= \sum_{M_L M_S M'_L M'_S} (L S M_L M_S | J M) (L' S' M'_L M'_S | J' M') \\ &\times \int_{\Omega_5} \mathcal{Y}_{K L M_L}^{l_x l_y*}(\Omega_5) \mathcal{Y}_{K' L' M'_L}^{l'_x l'_y}(\Omega_5) d\Omega_5 \chi^{S M_S} \chi^{S' M'_S} \\ &= \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{KK'} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

C'est-à-dire que les harmoniques hypersphériques composées tenant compte du spin forment bien une base de l'espace des fonctions propres de l'opérateur K (rappel : γ est une contraction des indices S , L , l_x , et l_y).

Annexe D

Les coefficients de Raynal-Revai

Les coefficients de Raynal-Revai peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \langle l_{x_i} l_{y_i} | l_{x_k} l_{y_k} \rangle_{KL} &= \frac{\pi}{4} \left[C_{l_{x_i} l_{y_i}}^{n_i} C_{l_{x_k} l_{y_k}}^{n_k} \right]^{-1/2} \\
 \times \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} i^{\lambda_3 + \lambda_4 + l_{y_i} - l_{y_k}} (-)^{\lambda_1 + \lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_3; l_{x_k}) f(\lambda_4, \lambda_2; l_{y_k}) f(\lambda_1, \lambda_4; l_{x_i}) f(\lambda_3, \lambda_2; l_{y_i}) \\
 \times \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_3 & l_{x_k} \\ \lambda_4 & \lambda_2 & l_{y_k} \\ l_{x_i} & l_{y_i} & L \end{array} \right\} \cdot \sum_{\mu\nu} (-)^{\mu} C_{\lambda_3 \lambda_4}^{\mu} C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu} (\cos \varphi_{ki})^{2\nu + \lambda_1 + \lambda_2} (\sin \varphi_{ki})^{2\mu + \lambda_3 + \lambda_4} \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 K &= 2n_i + l_{x_i} + l_{y_i} = 2n_k + l_{x_k} + l_{y_k} \text{ avec } n_i \text{ et } n_k \text{ entiers positifs ou nuls} \\
 |l_{x_i} - l_{y_i}| &\leq L \leq l_{x_i} + l_{y_i} \\
 |l_{x_k} - l_{y_k}| &\leq L \leq l_{x_k} + l_{y_k}
 \end{aligned}$$

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{\Gamma(2\alpha + \beta + \gamma + 2)}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{3}{2})\Gamma(\alpha + \gamma + \frac{3}{2})\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 2)}$$

$$f(a, b; c) = \sqrt{(2a+1)(2b+1)}(a0b0|c0) = \sqrt{(2a+1)(2b+1)(2c+1)}(-)^{a+b} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons apparaître dans cette expression des coefficients $3jm$ et un coefficient $9j$. Nous pouvons en tirer des règles de sélection :

$$\begin{aligned}
 K &= 2\nu + 2\nu + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
 |\lambda_1 - \lambda_3| &\leq l_{x_k} \leq \lambda_1 + \lambda_3 \\
 |\lambda_4 - \lambda_2| &\leq l_{y_k} \leq \lambda_4 + \lambda_2 \\
 |\lambda_1 - \lambda_4| &\leq l_{x_i} \leq \lambda_1 + \lambda_4 \\
 |\lambda_3 - \lambda_2| &\leq l_{y_i} \leq \lambda_3 + \lambda_2
 \end{aligned}$$

et au niveau de la parité :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 + \lambda_3 + l_{x_k} &\text{ pair} \\
 \lambda_4 + \lambda_2 + l_{y_k} &\text{ pair} \\
 \lambda_1 + \lambda_4 + l_{x_i} &\text{ pair} \\
 \lambda_3 + \lambda_2 + l_{y_i} &\text{ pair}
 \end{aligned}$$

Annexe E

Calcul des éléments de matrice réduits dans le cas des transitions électriques

E.1 Terme dépendant de \mathbf{y}

Commençons par calculer l'élément de matrice M_y associé à la partie dépendant uniquement de \mathbf{y} dans 3.58 :

$$\begin{aligned}
 M_y &= \langle \psi_f || M_1(\mathbf{y}) || \psi_i \rangle \\
 &= C_1 \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i} \langle \rho^{-5/2} \chi_{\gamma_f K_f}^{J_f \pi_f} \mathcal{Y}_{\gamma_f K_f}^{J_f} || \left(\frac{y}{\sqrt{\mu(23)1}} \right)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y) || \rho^{-5/2} \chi_{\gamma_i K_i}^{J_i \pi_i} \mathcal{Y}_{\gamma_i K_i}^{J_i} \rangle \\
 &= C_2 h^{-1} \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i r_f r_i} C_{\gamma_f K_f r_f}^{J_f \pi_f *} C_{\gamma_i K_i r_i}^{J_i \pi_i} I_R I_\Omega
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

avec

$$\begin{cases}
 C_1 = e \left[Z_{23} \left(-\frac{m_1}{M} \right)^\lambda + Z_1 \left(\frac{m_{23}}{M} \right)^\lambda \right] \\
 C_2 = C_1 / (\sqrt{\mu(23)1})^\lambda \\
 I_R = \langle \hat{f}_{r_f}(\rho/h) | \rho^{\lambda-5} | \hat{f}_{r_i}(\rho/h) \rangle \\
 I_\Omega = \langle \mathcal{Y}_{\gamma_f K_f}^{J_f} || (\sin \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y) || \mathcal{Y}_{\gamma_i K_i}^{J_i} \rangle
 \end{cases} \tag{E.2}$$

Dans E.1, le passage de la première à la deuxième égalité vient des définitions de M_1 et de la fonction d'onde (3.58 et 3.43). Le passage de la deuxième à la dernière égalité vient du développement de la fonction d'onde radiale sur le réseau de Lagrange (4.24) et de l'expression de y en fonction de ρ et α : $y = \rho \sin \alpha$.

Calculons l'intégrale radiale :

$$\begin{aligned}
 I_R &= \langle \hat{f}_{r_f}(\rho/h) | \rho^{\lambda-5} | \hat{f}_{r_i}(\rho/h) \rangle \\
 &= \int_0^\infty \hat{f}_{r_f}(\rho/h) \rho^{\lambda-5} \hat{f}_{r_i}(\rho/h) \rho^5 d\rho \\
 &= \delta_{r_i r_f} h^{\lambda+1} u_{r_i}^\lambda
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Le facteur en ρ^5 vient de l'élément de volume (voir 3.14), et l'intégrale est calculée en utilisant la relation approchée 4.16 qui reste valable dans le cas des fonctions de base régularisées.

Calculons l'intégrale angulaire :

$$I_\Omega = \left\langle \left[\mathcal{Y}_{K_f L_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\Omega_5) \otimes \chi^{S_f} \right]^{J_f} \|(\sin \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y)\| \left[\mathcal{Y}_{K_i L_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\Omega_5) \otimes \chi^{S_i} \right]^{J_i} \right\rangle \quad (\text{E.4})$$

Nous avons remplacé les harmoniques hypersphériques composées dépendant du spin par leur forme faisant apparaître un produit tensoriel d'une partie angulaire et d'une partie spin (voir 3.34). Rappelons un corollaire du théorème de Wigner-Eckart (voir [16]) :

Soit \mathbf{J} résultant de la composition de 2 moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 . Notons un état propre du système sous la forme $|J_1 J_2 J\rangle$. Si $T^{(k)}(1)$ est un opérateur tensoriel irréductible (OTI) qui n'agit que sur le système relatif au moment cinétique \mathbf{J}_1 , l'élément de matrice réduit peut s'écrire

$$\begin{aligned} \langle J'_1 J'_2 J' || T^{(k)}(1) || J_1 J_2 J \rangle &= \delta_{J'_2 J_2} (-)^{J'_1 + J_2 + J + k} (2J'_1 + 1)^{1/2} (2J + 1)^{1/2} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} J' & J'_1 & J_2 \\ J_1 & J & k \end{matrix} \right\} \langle J'_1 || T^{(k)}(1) || J_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

De même, si nous avons un OTI $T^{(k)}(2)$ n'agissant que sur le système relatif au second moment cinétique :

$$\begin{aligned} \langle J'_1 J'_2 J' || T^{(k)}(2) || J_1 J_2 J \rangle &= \delta_{J'_1 J_1} (-)^{J_1 + J_2 + J' + k} (2J'_2 + 1)^{1/2} (2J + 1)^{1/2} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} J' & J'_2 & J_1 \\ J_2 & J & k \end{matrix} \right\} \langle J'_2 || T^{(k)}(2) || J_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

L'équation E.4 présente exactement les conditions pour pouvoir appliquer E.5, avec $\mathbf{J}_1 = \mathbf{L}$, $\mathbf{J}_2 = \mathbf{S}$ et $k = \lambda$. Nous obtenons donc :

$$I_\Omega = \delta_{S_i S_f} (-)^{L_f + S_i + J_i + \lambda} (2L_f + 1)^{1/2} (2J_i + 1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J_f & L_f & S_i \\ L_i & J_i & \lambda \end{matrix} \right\} I_L \quad (\text{E.7})$$

avec

$$I_L = \langle \mathcal{Y}_{K_f L_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\Omega_5) \|(\sin \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y)\| \mathcal{Y}_{K_i L_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\Omega_5) \rangle \quad (\text{E.8})$$

Il nous reste à calculer l'élément de matrice réduit I_L , que nous pouvons réécrire d'après la définition 3.32

$$\begin{aligned} I_L &= \langle \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) \left[Y_{l_{x_f}}(\Omega_x) \otimes Y_{l_{y_f}}(\Omega_y) \right]^{L_f} \|(\sin \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y)\| \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) \left[Y_{l_{x_i}}(\Omega_x) \right. \\ &\quad \left. \otimes Y_{l_{y_i}}(\Omega_y) \right]^{L_i} \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

En séparant l'intégrale en α , et en utilisant le corollaire E.6 du théorème de Wigner-Eckart avec $\mathbf{J}_1 = \mathbf{l}_x$, $\mathbf{J}_2 = \mathbf{l}_y$, $\mathbf{J} = \mathbf{L}$ et $k = \lambda$ nous obtenons :

$$I_L = I_\alpha \delta_{l_{x_f} l_{x_i}} (-)^{l_{x_i} + l_{y_i} + L_f + \lambda} (2l_{y_f} + 1)^{1/2} (2L_i + 1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} L_f & l_{y_f} & l_{x_i} \\ l_{y_i} & L_i & \lambda \end{matrix} \right\} \\ \times \langle Y_{l_{y_f}}(\Omega_y) || Y^\lambda(\Omega_y) || Y_{l_{y_i}}(\Omega_y) \rangle \quad (\text{E.10})$$

avec

$$I_\alpha = \langle \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) | (\sin \alpha)^\lambda | \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) \rangle \quad (\text{E.11})$$

Le dernier élément de matrice vaut (voir [15] et [16]) :

$$\langle Y_{l_{y_f}}(\Omega_y) || Y^\lambda(\Omega_y) || Y_{l_{y_i}}(\Omega_y) \rangle = (4\pi)^{-1/2} (2\lambda + 1)^{1/2} (2l_{y_i} + 1)^{1/2} (2l_{y_f} + 1)^{-1/2} (\lambda l_{y_i} 0 0 | l_{y_f} 0) \quad (\text{E.12})$$

Nous avons donc finalement :

$$M_y = e \left[Z_{23} \left(-\frac{m_1}{M} \right)^\lambda + Z_1 \left(\frac{m_{23}}{M} \right)^\lambda \right] \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i r_f r_i} (-)^{S_i + J_i + l_{x_i} + l_{y_i}} \left(\frac{h u_{r_i}}{\sqrt{\mu(23)1}} \right)^\lambda \\ \times \delta_{r_i r_f} \delta_{S_i S_f} \delta_{l_{x_f} l_{x_i}} C_{\gamma_f K_f r_f}^{J_f \pi_f *} C_{\gamma_i K_i r_i}^{J_i \pi_i} \sqrt{\frac{(2L_i + 1)(2L_f + 1)(2J_i + 1)(2\lambda + 1)(2l_{y_i} + 1)}{4\pi}} \\ \times \left\{ \begin{matrix} J_f & L_f & S_i \\ L_i & J_i & \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_f & l_{y_f} & l_{x_i} \\ l_{y_i} & L_i & \lambda \end{matrix} \right\} (\lambda l_{y_i} 0 0 | l_{y_f} 0) I_\alpha \quad (\text{E.13})$$

où l'intégrale en α dépend de λ .

E.2 Calcul de l'intégrale en α dans l'élément M_y

Dans cette section, nous allons calculer l'intégrale I_α pour les valeurs de λ allant nous intéresser, à savoir, 0, 1 et 2. Cette intégrale s'écrit dans le cas général :

$$I_\alpha = \langle \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) | (\sin \alpha)^\lambda | \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) \rangle \\ = \int_0^{\pi/2} \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) (\sin \alpha)^{\lambda+2} (\cos \alpha)^2 d\alpha \\ = \mathcal{N}_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}} \mathcal{N}_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}} \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^{l_{x_f} + l_{x_i} + 2} (\sin \alpha)^{l_{y_f} + l_{y_i} + \lambda + 2} \\ \times P_{n_f}^{l_{y_f} + 1/2, l_{x_f} + 1/2}(\cos 2\alpha) P_{n_i}^{l_{y_i} + 1/2, l_{x_i} + 1/2}(\cos 2\alpha) d\alpha \quad (\text{E.14})$$

où nous avons utilisé les définitions de l'élément de volume (3.14) et des facteurs $\phi_K^{l_x l_y}(\alpha)$ (3.27). Effectuons le même changement de variables que dans l'annexe C.1, et posons $a = l_y + 1/2$ et $b = l_x + 1/2$:

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}} \mathcal{N}_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}} 2^{-\frac{a_f + a_i + \lambda + b_f + b_i + 4}{2}} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\frac{b_f + b_i}{2}} (1-x)^{\frac{a_f + a_i + \lambda}{2}} \\ \times P_{n_f}^{a_f, b_f}(x) P_{n_i}^{a_i, b_i}(x) dx \quad (\text{E.15})$$

E.2.1 $\lambda = 0$

Nous avons déjà comme règle de sélection $l_{x_i} = l_{x_f} = l_x$ (voir le $\delta_{l_{x_i}l_{x_f}}$ dans la formule E.13). Dans le cas $\lambda = 0$, le coefficient de Clebsch-Gordan nous donne la règle de sélection supplémentaire $l_{y_i} = l_{y_f} = l_y$. Cela implique les égalités $a_i = a_f = a$ et $b_i = b_f = b$. L'intégrale E.15 se réécrit alors

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+2)} N(a, b, n) \delta_{n_i n_f} \quad (\text{E.16})$$

avec $N(a, b, n)$ venant de la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi B.1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^a P_n^{a,b}(x) P_{n'}^{a,b}(x) dx &= \frac{2^{a+b+1} \Gamma(n+a+1) \Gamma(n+b+1)}{(2n+a+b+1) n! \Gamma(n+a+b+1)} \delta_{nn'} \\ &= N(a, b, n) \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

D'après les définitions de $N(a, b, n)$ et de $\mathcal{N}_K^{l_x l_y}$ (voir 3.27), et en remarquant que l'égalité des n_i et n_f entraîne $K_i = K_f = K$, par la définition des nombres n (voir aussi en 3.27), nous obtenons finalement la relation fort simple

$$I_\alpha = \delta_{n_i n_f} \quad (\text{E.18})$$

E.2.2 $\lambda = 1$

Dans ce cas-ci, nous avons comme règle de sélection $l_{x_i} = l_{x_f} = l_x$ (voir le $\delta_{l_{x_i}l_{x_f}}$ dans la formule E.13). Le coefficient de Clebsch-Gordan dans cette même relation E.13 nous donne la règle de sélection supplémentaire : $l_{y_f} = l_{y_i} + 1$ ou $l_{y_f} = l_{y_i} - 1$. Nous allons étudier les deux cas séparément.

Cas 1 : $l_{y_i} = l_{y_f} - 1 = l_y$

Soient $b_i = b_f = b$ et $a_i = a_f - 1 = a$. L'intégrale E.15 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x(l_y+1)} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^{a+1} P_{n_f}^{a+1,b}(x) P_{n_i}^{a,b}(x) dx \quad (\text{E.19})$$

Utilisons la relation de récurrence des polynômes de Jacobi B.3 :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x(l_y+1)} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} N(a, b, n_i) 2^{-(a+b+3)} \left[\frac{n_f + a + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} - \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i(n_f+1)} \right] \quad (\text{E.20})$$

où $N(a, b, n)$ est défini en E.17.

Cas 2 : $l_{y_f} = l_{y_i} - 1 = l_y$

Soient $b_i = b_f = b$ et $a_f = a_i - 1 = a$. L'intégrale E.15 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x (l_y + 1)} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^{a+1} P_{n_f}^{a,b}(x) P_{n_i}^{a+1,b}(x) dx \quad (\text{E.21})$$

En utilisant à nouveau la relation de récurrence des polynômes de Jacobi B.3, nous obtenons

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x (l_y + 1)} \mathbb{N}(a, b, n_f) 2^{-(a+b+3)} \left[\frac{n_i + a + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} - \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f (n_i + 1)} \right] \quad (\text{E.22})$$

E.2.3 $\lambda = 2$

Dans ce cas-ci, nous avons comme règle de sélection $l_{x_i} = l_{x_f} = l_x$ (voir le $\delta_{l_{x_i} l_{x_f}}$ dans la formule E.13). Le coefficient de Clebsch-Gordan dans cette même relation E.13 nous donne la règle de sélection supplémentaire : $l_{y_f} = l_{y_i} + 2$, ou $l_{y_f} = l_{y_i} - 2$, ou $l_{y_f} = l_{y_i}$. Nous allons étudier les trois cas séparément.

Cas 1 : $l_{y_i} = l_{y_f} - 2 = l_y$

Soient $b_i = b_f = b$ et $a_i = a_f - 2 = a$. L'intégrale E.15 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x (l_y + 2)} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+4)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^{a+2} P_{n_f}^{a+2,b}(x) P_{n_i}^{a,b}(x) dx \quad (\text{E.23})$$

Appliquons deux fois la relation B.3. L'intégrale en α devient :

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x (l_y + 2)} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathbb{N}(a, b, n_i) 2^{-(a+b+4)} \\ &\times \frac{n_f + a + 2}{n_f + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_f + a + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f n_i} - \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i (n_f + 1)} \right] \\ &- \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_f + a + 2}{n_f + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_i (n_f + 1)} - \frac{n_f + 2}{n_f + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_i (n_f + 2)} \right] \quad (\text{E.24}) \end{aligned}$$

Cas 2 : $l_{y_f} = l_{y_i} - 2 = l_y$

Nous allons effectuer les mêmes calculs que dans le cas précédent, mais avec $b_i = b_f = b$ et $a_f = a_i - 2 = a$. Nous obtenons comme résultat

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x (l_y + 2)} \mathbb{N}(a, b, n_f) 2^{-(a+b+4)} \\ &\times \frac{n_i + a + 2}{n_i + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_i + a + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} - \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f (n_i + 1)} \right] \\ &- \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_i + a + 2}{n_i + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_f (n_i + 1)} - \frac{n_i + 2}{n_i + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_f (n_i + 2)} \right] \quad (\text{E.25}) \end{aligned}$$

Cas 3 : $l_{y_f} = l_{y_i} = l_y$

Posons ici $b_i = b_f = b$ et $a_f = a_i = a$. L'intégrale I_α s'écrit :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^b (1-x)^{a+1} P_{n_f}^{a,b}(x) P_{n_i}^{a,b}(x) dx \quad (\text{E.26})$$

Pour résoudre cette intégrale, nous allons utiliser deux fois la relation entre les polynômes de Jacobi B.4, en supposant à la fois n_i et n_f non nuls. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_i + a + b + 1)(2n_f + a + b + 1)} \\ &\times \left[(n_f + a + b + 1)(n_i + a + b + 1) \text{N}(a + 1, b, n_f) \delta_{n_i n_f} \right. \\ &- (n_f + a + b + 1)(n_i + b) \text{N}(a + 1, b, n_f) \delta_{n_f(n_i-1)} \\ &- (n_f + b)(n_i + a + b + 1) \text{N}(a + 1, b, n_i) \delta_{n_i(n_f-1)} \\ &\left. + (n_i + b)(n_f + b) \text{N}(a + 1, b, n_i - 1) \delta_{n_i n_f} \right] \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

Dans le cas où l'un des degrés des polynômes de Jacobi est nul, nous allons utiliser la relation suivante, découlant de B.9 :

$$P_0^{a,b} = P_0^{a+1,b} = 1 \quad (\text{E.28})$$

Si n_i est nul et n_f non nul :

$$I_\alpha = -\mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \text{N}(a + 1, b, 0) \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_f + a + b + 1)} (n_f + b) \delta_{1n_f} \quad (\text{E.29})$$

Si n_f est nul et n_i non nul :

$$I_\alpha = -\mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \text{N}(a + 1, b, 0) \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_i + a + b + 1)} (n_i + b) \delta_{1n_i} \quad (\text{E.30})$$

Si $n_f = n_i = 0$:

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \text{N}(a + 1, b, 0) 2^{-(a+b+3)} \quad (\text{E.31})$$

E.3 Terme dépendant de \mathbf{x}

Nous allons calculer ici la partie de l'élément de matrice dépendant de la variable \mathbf{x} . En développant comme pour le terme en y , nous obtenons

$$\begin{aligned} M_y &= \langle \psi_f || M_2(\mathbf{x}) || \psi_i \rangle \\ &= C_1 \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i} \langle \rho^{-5/2} \chi_{\gamma_f K_f}^{J_f \pi_f} \mathcal{Y}_{\gamma_f K_f}^{J_f} || \left(\frac{x}{\sqrt{\mu_{23}}} \right)^\lambda Y^\lambda(\Omega_x) || \rho^{-5/2} \chi_{\gamma_i K_i}^{J_i \pi_i} \mathcal{Y}_{\gamma_i K_i}^{J_i} \rangle \\ &= C_2 h^{-1} \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i r_f r_i} C_{\gamma_f K_f r_f}^{J_f \pi_f *} C_{\gamma_i K_i r_i}^{J_i \pi_i} I_R I_\Omega \quad (\text{E.32}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} C_1 &= e \left[Z_2 \left(-\frac{m_3}{m_{23}} \right)^\lambda + Z_3 \left(\frac{m_2}{m_{23}} \right)^\lambda \right] \\ C_2 &= C_1 / (\sqrt{\mu_{23}})^\lambda \\ I_R &= \langle \hat{f}_{r_f}(\rho/h) | \rho^{\lambda-5} | \hat{f}_{r_i}(\rho/h) \rangle \\ I_\Omega &= \langle \mathcal{Y}_{\gamma_f K_f}^{J_f} | | (\cos \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y) | | \mathcal{Y}_{\gamma_i K_i}^{J_i} \rangle \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

L'intégrale radiale vaut toujours

$$I_R = \delta_{r_i r_f} h^{\lambda+1} u_{r_i}^\lambda \quad (\text{E.34})$$

L'intégrale angulaire se calcule exactement comme précédemment :

$$I_\Omega = \delta_{S_i S_f} (-)^{L_f + S_i + J_i + \lambda} (2L_f + 1)^{1/2} (2J_i + 1)^{1/2} \begin{Bmatrix} J_f & L_f & S_i \\ L_i & J_i & \lambda \end{Bmatrix} I_L \quad (\text{E.35})$$

avec

$$\begin{aligned} I_L &= \langle \mathcal{Y}_{K_f L_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\Omega_5) | | (\cos \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y) | | \mathcal{Y}_{K_i L_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\Omega_5) \rangle \\ &= \langle \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) [Y_{l_{x_f}}(\Omega_x) \otimes Y_{l_{y_f}}(\Omega_y)]^{L_f} | | (\cos \alpha)^\lambda Y^\lambda(\Omega_y) | | \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) [Y_{l_{x_i}}(\Omega_x) \\ &\quad \otimes Y_{l_{y_i}}(\Omega_y)]^{L_i} \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Nous utiliserons le corollaire E.5 du théorème de Wigner-Eckart pour calculer l'intégrale I_L :

$$\begin{aligned} I_L &= I_\alpha \delta_{l_{y_f} l_{y_i}} (-)^{l_{x_f} + l_{y_i} + L_i + \lambda} (2l_{x_f} + 1)^{1/2} (2L_i + 1)^{1/2} \begin{Bmatrix} L_f & l_{x_f} & l_{y_i} \\ l_{x_i} & L_i & \lambda \end{Bmatrix} \\ &\quad \times \langle Y_{l_{x_f}}(\Omega_x) | | Y^\lambda(\Omega_y) | | Y_{l_{x_i}}(\Omega_x) \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

avec

$$I_\alpha = \langle \phi_{K_f}^{l_{x_f} l_{y_f}}(\alpha) | | (\cos \alpha)^\lambda | | \phi_{K_i}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\alpha) \rangle \quad (\text{E.38})$$

Le dernier élément de matrice vaut

$$\langle Y_{l_{x_f}}(\Omega_x) | | Y^\lambda(\Omega_x) | | Y_{l_{x_i}}(\Omega_y) \rangle = (4\pi)^{-1/2} (2\lambda+1)^{1/2} (2l_{x_i}+1)^{1/2} (2l_{x_f}+1)^{-1/2} (\lambda l_{x_i} 00 | l_{x_f} 0) \quad (\text{E.39})$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} M_x &= e \left[Z_2 \left(-\frac{m_3}{m_{23}} \right)^\lambda + Z_3 \left(\frac{m_2}{m_{23}} \right)^\lambda \right] \sum_{\gamma_f \gamma_i K_f K_i r_f r_i} (-)^{L_f + S_i + J_i + l_{x_f} + l_{y_i} + L_i} \left(\frac{h u_{r_i}}{\sqrt{\mu_{23}}} \right)^\lambda \\ &\quad \times \delta_{r_i r_f} \delta_{S_i S_f} \delta_{l_{y_f} l_{y_i}} C_{\gamma_f K_f r_f}^{J_f \pi_f^*} C_{\gamma_i K_i r_i}^{J_i \pi_i} \sqrt{\frac{(2L_f + 1)(2J_i + 1)(2L_i + 1)(2\lambda + 1)(2l_{x_i} + 1)}{4\pi}} \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} J_f & L_f & S_i \\ L_i & J_i & \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_f & l_{x_f} & l_{y_i} \\ l_{x_i} & L_i & \lambda \end{Bmatrix} (\lambda l_{x_i} 00 | l_{x_f} 0) I_\alpha \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

E.4 Calcul de l'intégrale en α dans l'élément M_x

Dans cette section, nous allons calculer l'intégrale I_α pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Cette intégrale s'écrit dans le cas général, en effectuant le même changement de variables que précédemment et en posant $a = l_y + 1/2$ et $b = l_x + 1/2$:

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \langle \phi_{K_f}^{l_x l_y}(\alpha) | (\cos \alpha)^\lambda | \phi_{K_i}^{l_x l_y}(\alpha) \rangle \\
&= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-\frac{a_f + a_i + \lambda + b_f + b_i + 4}{2}} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\frac{b_f + b_i + \lambda}{2}} (1-x)^{\frac{a_f + a_i}{2}} \\
&\quad \times P_{n_f}^{a_f, b_f}(x) P_{n_i}^{a_i, b_i}(x) dx
\end{aligned} \tag{E.41}$$

E.4.1 $\lambda = 1$

Dans ce cas-ci, nous avons comme règle de sélection $l_{y_i} = l_{y_f} = l_y$ (voir le $\delta_{l_{y_i} l_{y_f}}$ dans la formule E.40). Le coefficient de Clebsch-Gordan dans cette même relation E.40 nous donne la règle de sélection supplémentaire : $l_{x_f} = l_{x_i} + 1$ ou $l_{x_f} = l_{x_i} - 1$. Nous allons étudier les deux cas séparément.

Cas 1 : $l_{x_i} = l_{x_f} - 1 = l_x$

Soient $a_i = a_f = a$ et $b_i = b_f - 1 = b$. L'intégrale E.41 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{(l_x+1)l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{b+1} (1-x)^a P_{n_f}^{a, b+1}(x) P_{n_i}^{a, b}(x) dx \tag{E.42}$$

Utilisons la relation entre les polynômes de Jacobi B.5 :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{(l_x+1)l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathcal{N}(a, b, n_i) 2^{-(a+b+3)} \left[\frac{n_f + b + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} + \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i (n_f+1)} \right] \tag{E.43}$$

où $\mathcal{N}(a, b, n)$ est défini en E.17.

Cas 2 : $l_{x_f} = l_{x_i} - 1 = l_x$

Soient $a_i = a_f = a$ et $b_f = b_i - 1 = b$. L'intégrale E.41 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{(l_x+1)l_y} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{b+1} (1-x)^a P_{n_f}^{a, b}(x) P_{n_i}^{a, b+1}(x) dx \tag{E.44}$$

En utilisant à nouveau la relation entre les polynômes de Jacobi B.5, nous obtenons

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{(l_x+1)l_y} \mathcal{N}(a, b, n_f) 2^{-(a+b+3)} \left[\frac{n_i + b + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} + \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f (n_i+1)} \right] \tag{E.45}$$

E.4.2 $\lambda = 2$

Dans ce cas-ci, nous avons comme règle de sélection $l_{y_i} = l_{y_f} = l_y$ (voir le $\delta_{l_{y_i}l_{y_f}}$ dans la formule E.40). Le coefficient de Clebsch-Gordan dans cette même relation E.40 nous donne la règle de sélection supplémentaire : $l_{x_f} = l_{x_i} + 2$, ou $l_{x_f} = l_{x_i} - 2$, ou $l_{x_f} = l_{x_i}$. Nous allons étudier les trois cas séparément.

Cas 1 : $l_{x_i} = l_{x_f} - 2 = l_x$

Soient $a_i = a_f = a$ et $b_i = b_f - 2 = b$. L'intégrale E.41 se réécrit

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{(l_x+2)l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+4)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{b+2} (1-x)^a P_{n_f}^{a,b+2}(x) P_{n_i}^{a,b}(x) dx \quad (\text{E.46})$$

Appliquons deux fois la relation B.5. L'intégrale en α devient :

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{(l_x+2)l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathbb{N}(a, b, n_i) 2^{-(a+b+4)} \\ &\times \frac{n_f + b + 2}{n_f + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_f + b + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f n_i} + \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i(n_f+1)} \right] \\ &+ \frac{n_f + 1}{n_f + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_f + b + 2}{n_f + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_i(n_f+1)} + \frac{n_f + 2}{n_f + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_i(n_f+2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

Cas 2 : $l_{x_f} = l_{x_i} - 2 = l_x$

Nous allons effectuer les mêmes calculs que dans le cas précédent, mais avec $a_i = a_f = a$ et $b_f = b_i - 2 = b$. Nous obtenons comme résultat

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{(l_x+2)l_y} \mathbb{N}(a, b, n_f) 2^{-(a+b+4)} \\ &\times \frac{n_i + b + 2}{n_i + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_i + b + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_i n_f} + \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b}{2} + 1} \delta_{n_f(n_i+1)} \right] \\ &+ \frac{n_i + 1}{n_i + \frac{a+b+3}{2}} \left[\frac{n_i + b + 2}{n_i + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_f(n_i+1)} + \frac{n_i + 2}{n_i + \frac{a+b}{2} + 2} \delta_{n_f(n_i+2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Cas 3 : $l_{x_f} = l_{x_i} = l_x$

Posons ici $b_i = b_f = b$ et $a_f = a_i = a$. L'intégrale I_α s'écrit :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} 2^{-(a+b+3)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{b+1} (1-x)^a P_{n_f}^{a,b}(x) P_{n_i}^{a,b}(x) dx \quad (\text{E.49})$$

Pour résoudre cette intégrale, nous allons utiliser deux fois la relation entre les polynômes de Jacobi B.6, en supposant à la fois n_i et n_f non nuls. Nous obtenons

alors

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_i + a + b + 1)(2n_f + a + b + 1)} \\
&\times \left[(n_f + a + b + 1)(n_i + a + b + 1) \mathbb{N}(a, b + 1, n_f) \delta_{n_i n_f} \right. \\
&+ (n_f + a + b + 1)(n_i + a) \mathbb{N}(a, b + 1, n_f) \delta_{n_f(n_i-1)} \\
&+ (n_f + a)(n_i + a + b + 1) \mathbb{N}(a, b + 1, n_i) \delta_{n_i(n_f-1)} \\
&\left. + (n_i + a)(n_f + a) \mathbb{N}(a, b + 1, n_i - 1) \delta_{n_i n_f} \right] \tag{E.50}
\end{aligned}$$

Dans le cas où l'un des degrés des polynômes de Jacobi est nul, nous allons utiliser la relation suivante, découlant de B.9 :

$$P_0^{a,b} = P_0^{a,b+1} = 1 \tag{E.51}$$

Si n_i est nul et n_f non nul :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathbb{N}(a, b + 1, 0) \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_f + a + b + 1)} (n_f + a) \delta_{1n_f} \tag{E.52}$$

Si n_f est nul et n_i non nul :

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathbb{N}(a, b + 1, 0) \frac{2^{-(a+b+3)}}{(2n_i + a + b + 1)} (n_i + a) \delta_{1n_i} \tag{E.53}$$

Si $n_f = n_i = 0$:

$$I_\alpha = \mathcal{N}_{K_f}^{l_x l_y} \mathcal{N}_{K_i}^{l_x l_y} \mathbb{N}(a, b + 1, 0) 2^{-(a+b+3)} \tag{E.54}$$

Bibliographie

- [1] D.H. Perkins : *Introduction to High Energy Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1987).
- [2] K. Hagiwara et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [3] F.E. Close : *An Introduction to Quarks and Partons*, Academic Press (1979).
- [4] B.F. Gibson, E.V. Hungerford III : *A survey of hypernuclear physics*, Phys. Rep. **257**, 349 (1995).
- [5] R.H. Dalitz : *Hypernuclear physics as we enter the third millenium*, Nucl. Phys. **A691**, 1c (2001).
- [6] B.F. Gibson : *Hypernuclear Physics, a Brief Past and Bright Future*, Nucl. Phys. **A689**, 57c (2001).
- [7] H. Bando, T. Motoba, J. Zofka : *Production, Structure and Decay of Hypernuclei*, Int. Journ. of Mod. Phys. A, **5**, 4021 (1990).
- [8] N. Takahashi, J.K. Ahn, H. Akikawa, S. Aoki, K. Arai, S.Y. Bahk, K.M. Baik, B. Bassalleck, J.H. Chung, M.S. Chung, D.H. Davis, T. Fukuda, K. Hoshino, A. Ichikawa, M. Ieiri, K. Imai, Y.H. Iwata, Y.S. Iwata, M. Kanda, M. Kaneko, T. Kawai, M. Kawasaki, C.O. Kim, J.Y. Kim, S.J. Kim, S.H. Kim, Y. Kondo, T. Kouketsu, Y.L. Lee, J.W.C. McNabb, M. Mitsuhashi, Y. Nagase, C. Nagoshi, K. Nakazawa, H. Noumi, S. Ogawa, H. Okabe, K. Oyama, H.M. Park, I.G. Park, J. Parker, Y.S. Ra, J.T. Rhee, A. Rusek, I. Shibuya, K.S. Sim, P.K. Saha, D. Seki, M. Sekimoto, J.S. Song, T. Takahashi, F. Takeuchi, H. Takana, K. Tanida, J. Tojo, H. Torii, S. Torikai, D.N. Tovee, N. Ushida, K. Yamamoto, N. Yasuda, J.T. Yang, C.J. Yoon, C.S. Yoon, M. Yosoi, T. Yoshida, L. Zhu : *Observation of a ${}^6_{\Lambda\Lambda}He$ double hypernucleus*, Phys. Rev. Lett. **87**, 212502 (2001).
- [9] M. Fabre de la Ripelle : *The Potential Harmonic Expansion Method*, Ann. Phys. **147**, 281 (1983).
- [10] F.M. Nunes, J.A. Christley, I.J. Thompson, R.C. Johnson, V.D. Efros : *Core Excitation in Three-Body Systems : Application to ${}^{12}Be$* , Nucl. Phys. **A609**, 43 (1996).
- [11] P. Descouvemont, C. Daniel, D. Baye : *Three-body systems with Lagrange-mesh techniques in hyperspherical coordinates*, Phys. Rev. C **67**, 044309 (2003).
- [12] J. Raynal, J. Revai : *Transformation Coefficients in the Hyperspherical Approach to the Three-Body Problem*, Nuovo Cimento **68**, 612 (1970).

- [13] C. Daniel : *Etude de noyaux à halo par la méthode des coordonnées hypersphériques*, Travail de Fin d'Etudes, ULB, Faculté des Sciences Appliquées (2001).
- [14] J. Hubeau : *Résonances de noyaux à halo par la méthode des coordonnées hypersphériques*, Travail de Fin d'Etude, ULB, Faculté des Sciences Appliquées (2002).
- [15] D. Baye : *Mécanique quantique. Première partie : notions de base*, notes de cours, Presses Universitaires de Bruxelles (1996).
- [16] D. Baye : *Mécanique quantique. Deuxième partie : symétries et invariances*, notes de cours, Presses Universitaires de Bruxelles (1996).
- [17] M. Abramowitz, I.A. Stegun : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York (1970).
- [18] D. Baye : *Eléments de physique nucléaire*, notes de cours provisoires, non publiées (1999).
- [19] R.C. Herndon, Y.C. Tang : *Phenomenological Λ -Nucleon Potentials from S-Shell Hypernuclei*, Phys. Rev. **153**, 1091 (1967) ; Phys. Rev. **159**, 853 (1967) ; Phys. Rev. **165**, 1093 (1968).
- [20] A. Deloff : *Phenomenological Study of Λ -Nucleon Interaction* Phys. Rev. C **20**, 1528 (1979).
- [21] E. Hiyama, M. Kamimura, T. Motoba, T. Yamada, Y. Yamamoto : *ΛN Spin-Orbit Splittings in ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$ and ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$ Studied with One-Boson-Exchange ΛN Interactions*, Phys. Rev. Lett. **85**, 270 (2000).
- [22] M.M. Nagels, T.A. Rijken, J.J. de Swart : *Baryon-baryon scattering in a one-boson-exchange-potential approach*, Phys. Rev D **12**, 744 (1975) ; Phys. Rev. D **15**, 2547 (1977) ; Phys. Rev D **20**, 1633 (1979).
- [23] Y. Fujiwara, K. Miyagawa, M. Kohno, Y. Suzuki, D. Baye, J.-M. Sparenberg : *Faddeev calculation of 3α and $\alpha - \alpha - \Lambda$ systems using the $\alpha - \alpha$ RGM kernel*, à paraître (2004).
- [24] V.T. Voronchev, V.I. Kukulin, V.N. Pomerantsev, G.G. Ryzhikh : *Three-Body Calculations of $A = 9$ Nuclei with Supersymmetric $\alpha - \alpha$ Potentials*, Few-Body Systems **18**, 191 (1995).
- [25] D. Baye : *Supersymmetry between Deep and Shallow Nucleus-Nucleus Potentials*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2738 (1986).
- [26] B. Buck, H. Friedrich, C. Wheatley, *Local Potential Models for the Scattering of Complex Nuclei*, Nucl. Phys. **A275**, 246 (1977).
- [27] S. Ali, A.R. Bodmer, *Phenomenological $\alpha - \alpha$ Potentials*, Nucl. Phys. **80**, 99 (1966).
- [28] I. Kumagai-Fuse, S. Okabe, Y. Akaishi : *Evidence for a Central Repulsion Potential from Pionic Decay of s-shell Λ -Hypernuclei*, Phys. Lett. **345**, 386 (1995).

- [29] E. Hiyama, M. Kamimura, T. Motoba, T. Yamada, Y. Yamamoto : *Four-Body Cluster Structure of $A = 7 - 10$ Double- Λ hypernuclei*, Phys. Rev. C **66**, 024007 (2002).
- [30] E. Cravo, A.C. Fonseca, Y. Koike : *Three-Body Calculation of the Structure of ${}^9_{\Lambda}Be$* , Phys. Rev. C **66**, 014001 (2002).
- [31] J.P. Glickman, W. Bertozzi, T.N. Buti, S. Dixit, F.W. Hersman, C.E. Hyde-Wright, M.V. Hynes, R.W. Lourie, B.E. Norum, J.J. Kelly, B.L. Berman, D.J. Millener : *Electron Scattering from 9Be* , Phys. Rev. C **43**, 1740 (1991).
- [32] H. Akikawa, S. Ajimura, R.E. Chrien, P.M. Eugenio, G.B. Franklin, J. Franz, L. Gang, K. Imai, P. Khaustov, M. May, P.H. Pile, B. Quinn, A. Rusek, J. Sasao, R.I. Sawafta, H. Schmitt, H. Tamura, L. Tang, K. Tanida, L. Yuan, S.H. Zhou, L.H. Zhu, X.F. Zhu : *Hypernuclear Fine Structure in ${}^9_{\Lambda}Be$* , Phys. Rev. Lett. **88**, 082501 (2002).
- [33] T. Motoba, H. Bando, K. Ikeda : *Light p -Shell Λ -Hypernuclei by the Microscopic Three-Cluster Model*, Prog. Theor. Phys. **70**, 189 (1983).
- [34] Md.A. Khan, T.K. Das : *Investigation of Exotic ${}^6_{\Lambda\Lambda}He$ Hypernuclei by the Hyperspherical Three-Body Method*, Fizika B (Zagreb) **9**, 55 (2000).